Tome 15. N° 12. Décembre 1954.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE
ET
LE RADIUM

RÉSONANCE NUCLÉAIRE ET MOUVEMENT DES MOLÉCULES DANS LES FLUIDES

Par E. M. PURCELL,
Professeur à l'Université Harvard (1).

Sommaire. — L'auteur expose les résultats d'expériences qui mettent en évidence l'influence de la pression sur les temps de relaxation de la résonance nucléaire des protons dans les liquides. Des mesures ont été faites jusqu'à plusieurs dizaines de milliers d'atmosphères. Les résultats obtenus ne peuvent pas s'interpréter par la seule variation du coefficient de viscosité et du coefficient de diffusion en fonction de la pression. Ces dernières grandeurs dépendent essentiellement des degrés de liberté de translation des molécules dans le liquide, tandis que les temps de relaxation dépendent aussi fortement des mouvements de rotation des molécules. Une augmentation de pression inhibe davantage les mouvements de translation que les mouvements de rotation, ce qui explique que les temps de relaxation dépendent d'une manière différente de la pression que la viscosité et la diffusion.

Mécanisme de la relaxation nucléaire. — Les phénomènes d'absorption liés à la résonance nucléaire dépendent de l'existence d'une polarisation partielle d'un ensemble de moments magnétiques nucléaires. Ces phénomènes se produisent par l'intermédiaire des mécanismes qui conduisent à l'établissement de l'équilibre thermique, c'est-à-dire qui conduisent à une répartition de population entre les sous-niveaux *Zeeman* nucléaires donnée par la formule de Boltzmann.

Cet échange nécessaire d'énergie thermique entre les noyaux et l'ensemble du système, suit, dans le temps, une loi exponentielle $e^{-\frac{t}{T_1}}$, loi qui fait intervenir la grandeur caractéristique T_1, appelée « temps de relaxation spin-réseau », et dont les valeurs peuvent varier entre 10^{-4} et 10^{4} s suivant les substances et les conditions.

La figure 1 montre l'effet précédent (temps de relaxation dans un cristal de NH_4Br à la température de l'air liquide, $T_1 = 32$ s).

Les mécanismes de relaxation font intervenir essentiellement des champs alternatifs *d'origine thermique*, capables de provoquer des « réorientations » du spin nucléaire. Dans le cas des moments magnétiques purs (des protons, par exemple), ces champs doivent être des champs magnétiques internes ayant des composantes oscillantes dans la zone des radiofréquences.

Dans le cas de noyaux possédant un moment

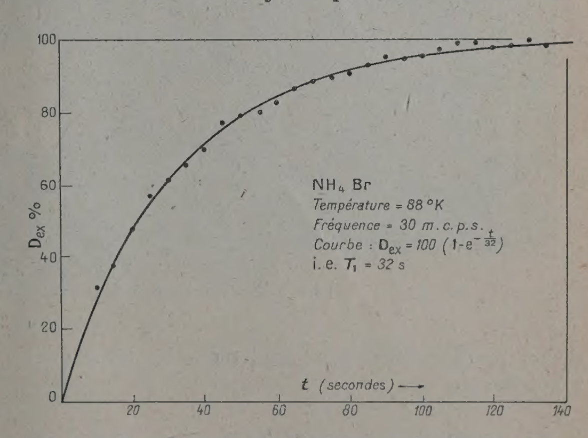


Fig. 1. — Mesure du temps de relaxation de NH_4 Br à 88° K par une méthode directe.

électrique quadrupôle Q, des gradients de champs électriques ayant des composantes alternatives peuvent provoquer les transitions, mais ce dernier cas n'est pas envisagé dans ce qui suit.

Origine des champs fluctuants. — C'est dans

(1) Conférence faite à la Société française de Physique le 15 janvier 1954, traduite par M. J. Brossel, École normale.

les *liquides* que la relaxation nucléaire a été étudiée tout d'abord.

Les champs magnétiques internes peuvent avoir deux origines :

a. Moments magnétiques des autres noyaux de la même molécule;

b. Moments des noyaux des autres molécules.

L'origine de la fluctuation est le mouvement thermique des molécules : le champ d'un dipole dépend de l'angle et de la distance.

La fluctuation, dans le cas *a* (d'origine intramoléculaire), provient de la rotation de la molécule; dans le cas *b* (d'origine intermoléculaire), elle provient de l'arrivée ou du départ des molécules voisines.

La distinction est importante et doit être conservée à l'esprit.

La figure 2, montrant un ensemble de molécules

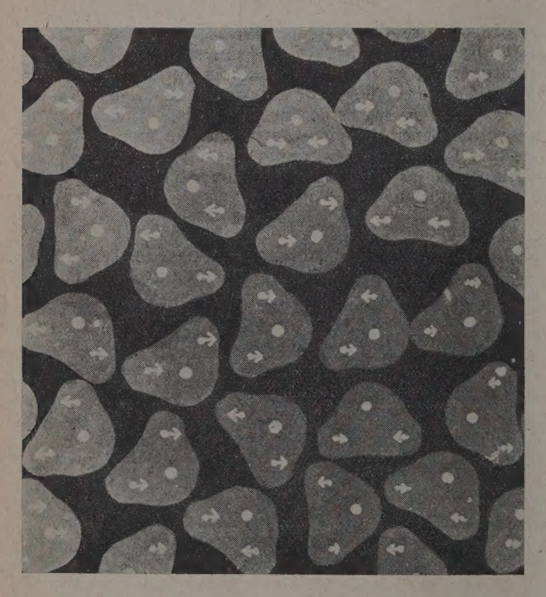


Fig. 2.

d'eau, permet d'illustrer simplement les remarques précédentes.

Spectre du champ interne. — La grandeur de ces champs internes est d'ordinaire de quelques gauss. Leur efficacité à produire les transitions dépend cependant de la rapidité des fluctuations incohérentes qui déterminent la répartition d'intensité du spectre.

Dans un liquide ordinaire, le temps caractéristique de réorientation ou de changement de position d'une molécule est de l'ordre de 10^{-11} s, ce temps T_c, le temps de « corrélation », est très court par rapport à la période ω_0 de la précession nucléaire. Le spectre est « blanc » au voisinage de ω_0. Mais son intensité en ce point est d'autant plus faible que le temps T_c est plus court (*fig.* 3).

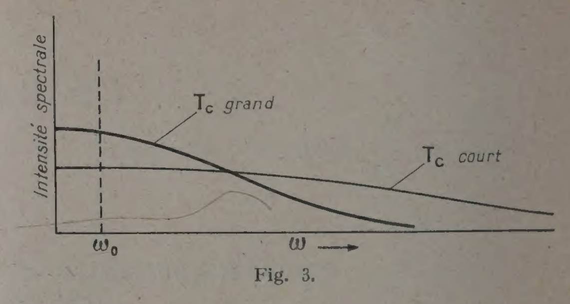


Fig. 3.

Donc, plus les fluctuations sont lentes, plus elles sont efficaces pour provoquer la relaxation nucléaire, et l'on peut s'attendre à ce que

$$T_1 \simeq \frac{1}{T_c}.$$

Relations entre la relaxation nucléaire et la viscosité et la mobilité moléculaire. — La mobilité moléculaire traduit sa présence par l'existence de la viscosité. Des expériences dans lesquelles on faisait varier la viscosité dans de grandes limites en faisant varier la température (dans la glycérine, par exemple) ont montré que η est proportionnel à T_1, et par suite que T_1 est proportionnel à $\frac{1}{T_c}$.

Il existe une vérification encore plus directe, dans le cas des liquides polaires, où la « dispersion diélectrique » de Debye permet d'atteindre directement le temps de corrélation de l'orientation moléculaire. L'accord entre les deux types de mesures est bon dans ce cas.

Il est une quantité physique qui est encore plus directement reliée à T_c, en particulier en ce qui concerne le champ intermoléculaire, c'est la constante de diffusion D. La plupart des théories de l'état liquide (Frenkel, Eyring, par exemple) prévoient une relation entre η et D, dont la forme générale est semblable à celle de la relation de Stokes-Einstein

$$D = \frac{KT}{6\pi\eta a}.$$

Nous avons donc trois quantités dont il est intéressant de mesurer les variations :

1° Temps de relaxation T_1 (dépendant du temps de corrélation T_c des champs internes);

2° Viscosité, $\frac{1}{\eta}$;

3° Constante de diffusion, $\frac{1}{D}$.

But des expériences à haute pression. —

La plupart des liquides présentent un accroissement considérable de viscosité en fonction de la pression, par des facteurs de 20 à 50 à 10 000 kg/cm² (Bridgman). La raison est, à coup sûr, la réduction de l'espace libre autour de chaque molécule, effet très différent de celui qui résulte d'un abaissement de température.

Que deviennent la « mobilité moléculaire » et « l'orientabilité moléculaire » telles qu'elles nous sont révélées par la relaxation nucléaire ?

Ces questions sont à l'origine du travail que nous décrivons ci-dessous (travail effectué à Harvard par G. Benedek).

Le problème était de mesurer T_1 en fonction de P et comparer les résultats à ceux de Bridgman relatifs à η.

Au cours des mesures, il apparut qu'on pouvait aussi mesurer D par la résonance nucléaire, et qu'on pouvait par suite comparer les variations de η et de D en fonction de la pression.

« toupies magnétiques » dans un champ fort H_0. Les axes sont animés d'une précession autour de H_0.

Un champ magnétique H_1, perpendiculaire à H_0,

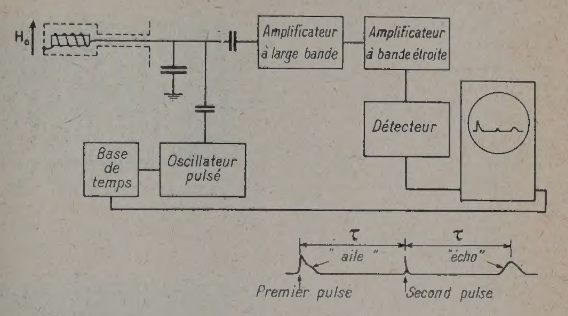


Fig. 4. — Appareil pour écho de spin. (Pour la théorie générale, *voir* E. L. Hahn, *Phys. Rev.*, 1950, **80**, 580.)

Méthode utilisée. — La résonance nucléaire a été observée (et T_1 mesuré) par la méthode de « l'écho de spin » décrite par Hahn.

Considérons les noyaux comme un ensemble de « toupies magnétiques »... tournant autour de H_0 avec la vitesse de précession, fait basculer les moments magnétiques. Ce champ de radiofréquence est appliqué sous forme d'une impulsion de durée telle qu'elle amène juste les

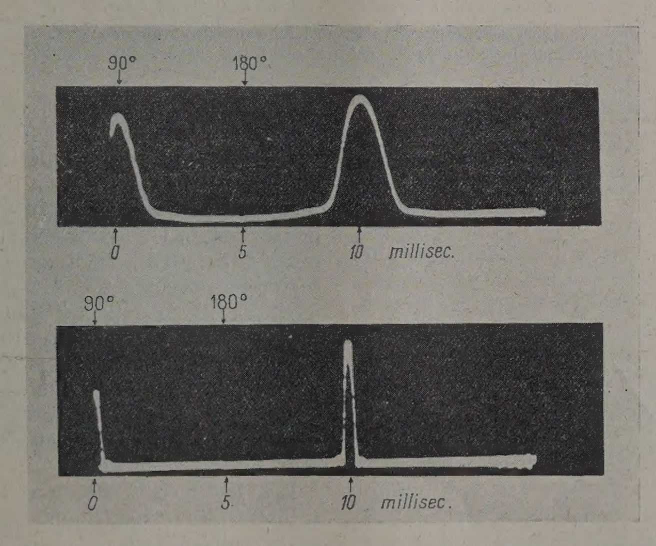


Fig. 5. — L'homogénéité du champ magnétique est diminuée dans le cas de la figure du bas.

moments dans le plan équatorial (impulsion dite de 90°).

A partir de ce moment-là, les moments ont une précession libre dans le plan équatorial. Mais ils perdent leur cohérence de phase parce que le champ H_0 est toujours légèrement différent d'un point à l'autre.

On applique alors, à l'instant t une impulsion « de 180° » (c'est-à-dire de longueur double) dont le résultat est de tourner face pour face le plan équatorial de la figure, si bien qu'à l'instant $2t$ la cohérence de phase, entre les divers moments, est entièrement rétablie, ce qui provoque l'émission d'un « écho ».

La figure 4 représente l'appareillage utilisé et la figure 5 montre une séquence d'écho.

Les champs internes incohérents provoquent une baisse de l'intensité de l'écho, c'est-à-dire une baisse

de la cohérence de phase qu'il n'est *pas possible* de rattraper par « l'impulsion de 180° ». Ceci est, en fait, un effet du « temps de relaxation transversal » T_2, mais, on peut aussi mesurer T_1 par une variante de la méthode et, dans les liquides, T_1 et T_2 sont identiques, de toute manière.

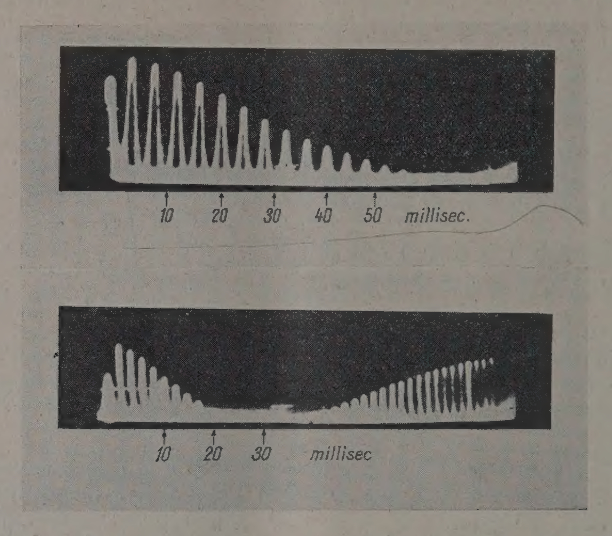


Fig. 6 (*haut*). — Courbe T_2 : Expositions multiples superposées. Combinaisons : 90°-180°. Distance des échos : 4 ms.

(*bas*). — Courbe T_1 : Expositions multiples superposées. Combinaisons : 180°-90°. Distance des échos : 2 ms. Glycérine.

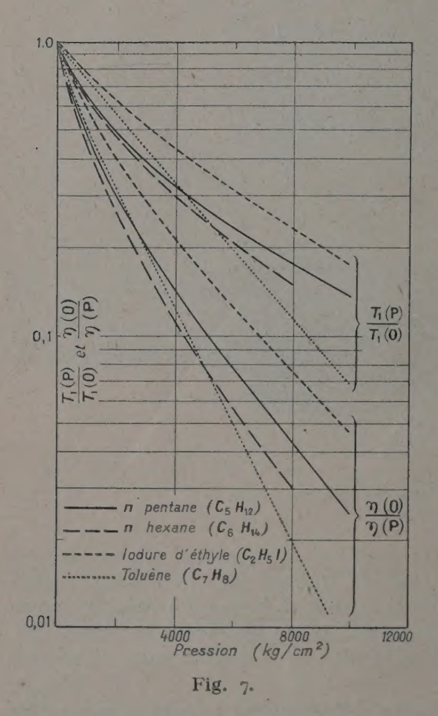


Fig. 7.

La figure 6 représente l'effet d'affaiblissement de l'écho en fonction du temps t séparant les deux impulsions de radiofréquence.

La partie « haute pression » de l'expérience comportait comme problème essentiel la construction d'une enceinte non magnétique tenant la pression et permettant l'application d'un champ magnétique intense. Un alliage Cu-Be fut utilisé sur la suggestion de Bridgman. Un cylindre de 5 cm, avec un diamètre interne de 1 cm, tient 10 000 atm sans subir de distorsion permanente.

Un avantage de la méthode de l'écho de spin est qu'il suffit de faire une seule amenée coaxiale dans le volume haute pression, et qu'il n'est pas nécessaire d'avoir de champ modulateur. L'échantillon et la bobine haute fréquence étaient scellés à l'intérieur d'un silphon flexible immergé dans le liquide compresseur.

Les techniques standard de Bridgman ont été utilisées, les échantillons étaient des liquides qui ne se solidifiaient pas à haute pression et étudiés par Bridgman en ce qui concerne les variations du coefficient η en fonction de la pression.

Résultats. — En général, T_1 décroît quand P croît, ce qui indique l'augmentation attendue de T_c, ou encore, la diminution de la mobilité moléculaire.

Cependant, dans tous les cas envisagés T_1 décroît beaucoup moins que η n'augmente ,le produit $T_1\eta$ n'est pas du tout constant mais croît avec la pression La figure 7 permet de comparer à cet égard le comportement de quatre liquides organiques : pentane, hexane, iodure d'éthyle et toluène.

Dans l'hexane, par exemple, η croît par un facteur 40 quand T_1 décroît par un facteur 7 seulement.

L'eau ne présente qu'un changement modéré de η, mais, là encore, T_1 change encore moins.

En résumé, il apparaît que le temps de corrélation des champs internes, ne change pas, en fonction de la pression, dans la même proportion que la viscosité du liquide.

Mesure de la constante de diffusion D. — Dans un champ inhomogène, il y a quelquefois une perte de cohérence de phase dans la précession des spins à cause de leur migration lente d'un point à un autre par suite d'une diffusion.

Ceci produit une décroissance de l'écho, d'un type tout à fait caractéristique, avec une loi en e^{-t^3} au lieu de e^{-t}. La théorie complète de cet effet a été faite, et on peut l'utiliser pour mesurer quantitativement la diffusion dans les liquides, du moins dans quelques liquides.

La figure 8 montre une décroissance d'écho (dans CH_3I) caractéristique de l'effet de diffusion.

Toutes les méthodes de mesure de D nécessitent un étiquetage des molécules. Dans le cas présent, l'étiquette qui permet de reconnaître la molécule, est la direction, ou la phase, du moment magnétique attaché à la molécule.

La méthode cependant possède des limitations sérieuses dans ses applications, à cause du fait suivant : si la molécule contient plusieurs noyaux semblables dans des positions non équivalentes

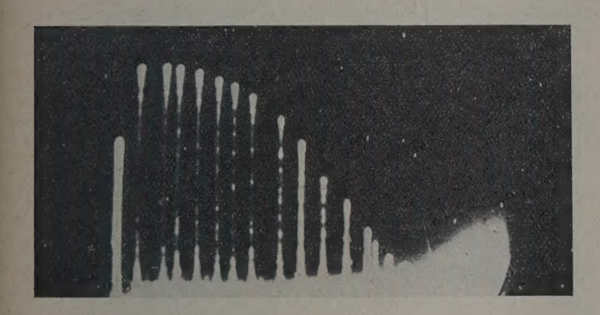


Fig. 8. — Courbe de décroissance due principalement à l'effet de diffusion.
(Iodure de méthyle.)
Expositions multiples superposées : 90°-180°.

$$\left(\frac{1}{T^{**}}\right)^3 = 1,6.10^3/s^3, \; D = 68 \text{ cm}^2/\text{jour}.$$

(comme dans l'éthane, par exemple) la courbe-enveloppe de l'écho est déformée par un autre effet résultant du couplage des spins nucléaires, et l'effet de diffusion est masqué.

Dans l'iodure d'éthyle tous les H sont équivalents.

Un autre avantage de la méthode est qu'elle permet de détecter aussi la *convection* qui affecte l'enveloppe de l'écho de façon très différente.

Les résultats des mesures de diffusion sont les suivants :

Dans le cas de l'eau, les changements de D et η

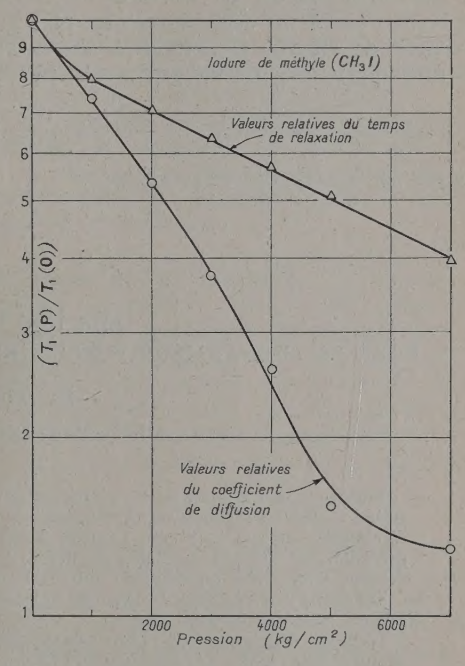


Fig. 9.

en fonction de P sont en bon accord. C'est-à-dire que $D\eta$ est pratiquement constant; comme le prévoit la loi de Stokes-Einstein.

Dans le cas de CH_3I, il n'existe pas de mesure de η. Cependant la variation de D peut être comparée à celle de T_1. La figure 9 montre que le changement de D est beaucoup plus grand que le changement de T_1, ce qui montre encore que T_c change moins vite que la mobilité moléculaire.

Conclusion. — Une explication générale de ces résultats est possible, semble-t-il, si l'on se souvient que deux effets provoquent les fluctuations incohérentes des champs internes :

a. la rotation d'une molécule;

b. la mobilité, et, à un moindre degré, la rotation de ses voisines.

Maintenant, si nous réduisons, par accroissement de pression l'espace vide entre molécules, en entassant les molécules dans un espace moindre, il est raisonnable de penser que l'on réduit ainsi beaucoup plus les mouvements d'une molécule d'un endroit

à l'autre que les mouvements de rotation propre d'une molécule dans l'espace qui lui est alloué.

Ceci est certainement vrai pour des molécules sphériques.

La viscosité et la diffusion dépendent de la mobilité moléculaire tandis que la relaxation nucléaire dépend en outre à un degré beaucoup plus grand des degrés de liberté caractérisant l'orientation.

Il semble que les expériences précédentes montrent cette différence. Elles montrent aussi la relation qui existe entre D et η.

Elles n'en sont cependant qu'à leur début, et beaucoup reste à faire.

Enfin, notons en terminant, que la résonance nucléaire permet de mesurer D de façon précise (de façon plus précise même que les autres méthodes) dans les cas limites où la méthode s'applique.

Manuscrit reçu le 20 mars 1954.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 15, DÉCEMBRE 1954, PAGE 790.

SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE POUR LA COMPARAISON PRÉCISE DU RAYONNEMENT DES AMPOULES DE RADIUM

Par Mme Irène CURIE,
Laboratoire Curie de l'Institut du Radium.

Sommaire. — La méthode de compensation entre les courants produits dans deux chambres d'ionisation se prête à des mesures de comparaison de très grande précision entre des sources de rayonnement d'intensité presque égale. Par l'emploi d'une ampoule de radon, dont la décroissance est connue avec précision, utilisée comme étalon auxiliaire, on peut adapter cette méthode à la comparaison du rayonnement d'ampoules de radium d'intensités différentes.

On décrit des modèles de chambres propres à ces mesures, et des expériences préliminaires de comparaisons d'étalons de radium.

L'emploi d'ampoules de radon comme étalon auxiliaire a parfois de l'intérêt même dans le cas de mesures faites avec une seule chambre d'ionisation ou avec d'autres appareils de mesure. Il peut faciliter la comparaison d'ampoules d'intensité extrêmement différente, ou bien la comparaison d'étalons qui se trouvent dans des laboratoires différents et dont on désire éviter le transport.

Malgré le très grand nombre de radioéléments artificiels qui ont été découverts, le radium en équilibre avec le radon et le dépôt actif à vie courte est jusqu'ici le corps le plus commode pour servir d'étalon de rayonnement γ.

Un étalon de radium est constitué par une ampoule contenant une quantité soigneusement pesée d'un sel de radium extrêmement pur. En principe, toute ampoule ainsi préparée est un étalon. En pratique, comme la préparation d'une telle ampoule est un travail chimique extrêmement délicat, il est important de comparer avec une grande précision le rayonnement γ des tubes étalons, pour s'assurer que le rapport de l'intensité du rayonnement correspond au rapport des poids. D'autre part, une ampoule contenant un sel de radium non pesé peut être utilisée comme étalon secondaire si son rayonnement a été comparé avec précision à celui d'une ampoule étalon. Pourvu qu'il n'y ait pas d'impuretés radioactives, il n'est pas nécessaire alors que le radium soit tout à fait pur. Il est donc extrêmement important d'avoir une bonne méthode de comparaison des tubes de radium par le rayonnement γ.

Les ampoules utilisées comme étalon ont été d'abord : une ampoule préparée par Marie Curie en 1911, qui a été choisie comme étalon international, et une ampoule préparée par Hönigschmidt à la même époque [1].

Ces tubes ont été soigneusement comparés entre eux et le rapport des rayonnements γ reconnu égal à 2 pour 1000 près, au rapport des poids. Les ampoules destinées à servir d'étalon secondaire dans les différents pays étaient comparées successivement à Paris à l'Étalon International, à Vienne à l'étalon de Hönigschmidt. Les valeurs ont toujours été concordantes à 2 pour 1000 près.

En 1934, 20 ampoules étalons ont été préparées par Hönigschmidt. Deux de ces ampoules ont remplacé respectivement l'Étalon International et l'étalon de Vienne : on craignait, en effet, que les ampoules anciennement préparées n'éclatent un jour, du fait de la pression de l'hélium venant du rayonnement α; c'est pourquoi, du reste, on a fait des ampoules relativement grandes pour la quantité de sel qu'elles contenaient. Malheureusement, les ampoules de Hönigschmidt n'ont pas été comparées entre elles par le rayonnement γ, et quelques-unes

seulement ont été comparées aux étalons anciens de Paris et de Vienne.

La Commission mixte de Radioactivité a estimé qu'il était important de faire avec la meilleure précision possible les comparaisons qui n'avaient pas été faites, d'autant plus que certains doutes avaient été émis sur la concordance des divers étalons.

Les comparaisons d'étalons avaient été faites jusqu'ici au Laboratoire Curie de l'Institut du Radium de Paris et à l'Institut für Radiumforschung de Vienne. Les appareils utilisés étaient différents, mais les deux instituts employaient des chambres d'ionisation. Au Laboratoire Curie on utilise le grand condensateur du service de mesures et la méthode de compensation au moyen du quartz piézoélectrique [2] (1).

La précision de 2 pour 1000 était obtenue en faisant de longues séries de mesures dont on prenait la moyenne. La précision des mesures individuelles est sensiblement plus faible.

J'ai cherché une méthode qui permette de faire des déterminations individuellement plus précises afin de pouvoir comparer plus rapidement des étalons.

On peut espérer augmenter beaucoup la précision de comparaisons faites au moyen des chambres d'ionisation en employant la méthode de compensation : Soit deux chambres d'ionisation semblables portées à des tensions opposées et reliées au même électromètre, et des sources qui donnent dans les deux chambres des courants I_1 et I_2 peu différents; le courant mesuré est la différence $i = I_1 - I_2$. Si les courants I_1 et I_2 sont suffisamment intenses et réguliers, la mesure de I_1 ou I_2 et de i permet de calculer le rapport de I_1 et I_2 avec une précision beaucoup meilleure que celle que l'on obtiendrait en mesurant séparément I_1 et I_2.

On peut aussi se servir de la méthode de compensation pour rechercher de très petites différences de période : ainsi Marie Curie l'a utilisée en 1924 pour essayer de mettre en évidence une différence entre la période d'un tube de radon ordinaire et celle d'un tube de radon très concentré : elle a pu vérifier que la période était la même à 0,5 pour 1000 près, précision que l'on n'aurait pu atteindre par des mesures directes.

Peu après, j'ai utilisé le dispositif de chambres en compensation établi par Marie Curie à cette occasion, pour déterminer avec précision la période du radon par une méthode nouvelle : on observe les instants t_1, t_2, t' où un courant constant produit par une ampoule de radium dans l'une des chambres est égal aux courants variables I_1, I_2, I' produits dans l'autre chambre par deux ampoules de radon d'intensité peu différente que l'on y place d'abord séparément, puis ensemble. La différence entre la moyenne des temps t_1 et t_2 et le temps t' donne la période. La précision obtenue était de 0,5 pour 1000 [3].

J'ai recherché si l'on ne pourrait pas trouver une méthode de compensation pour comparer les étalons de radium, mais on ne peut utiliser avec avantage cette méthode qu'avec des sources de rayonnement de valeur peu différente, ce qui n'est pas toujours le cas dans les comparaisons d'étalons.

Il est possible de surmonter cette difficulté en comparant les ampoules de radium non l'une à l'autre, mais à une ampoule de radon, puisque la variation d'activité de celle-ci avec le temps est connue avec précision.

Principe de la méthode. — Prenons deux chambres semblables montées en compensation, soit, par ordre décroissant de quantité de radium, des ampoules A, B, C, ..., que l'on veut comparer entre elles. On met dans l'une des chambres le tube A et dans l'autre chambre une ampoule de radon dont l'intensité de rayonnement est un peu plus forte. On mesure la différence i_A des intensités,

$$i_A = I_A - I_R.$$

i_A, d'abord négatif, augmente quand le courant I_R dû au radon diminue, passe par 0 à un temps t_A, puis devient positif. On enlève alors l'ampoule A et on la remplace par l'ampoule B, plus faible. Le courant i_B, négatif d'abord, passe par 0 pour un temps t_B, puis devient positif, on remplace alors l'ampoule B par l'ampoule C, etc.

Le rapport des intensités des tubes A, B, C, ..., est égal au rapport des intensités du tube de radon aux temps t_A, t_B, t_C, ... La précision obtenue sur le rapport des intensités dépend de la précision obtenue sur la détermination de l'instant où le courant s'annule : la constante radioactive du radon étant environ $2{,}1 \cdot 10^{-6}\ s^{-1}$, on voit qu'une différence de 50 s correspond à une différence de 10^{-4} sur l'intensité du courant.

D'autre part, on peut calculer facilement que, la période du radon étant déterminée à 0,5 pour 1000 près, l'erreur venant de l'incertitude sur la valeur de la période est égale à n fois 0,5 pour 1000, n étant le nombre de périodes de décroissance du radon, entre les temps t_A, t_B, t_C, ... considérés. Si, par exemple, on a

$$\frac{B}{A} = 0{,}8 \qquad \frac{C}{A} = 0{,}5, \qquad \frac{D}{A} = 0{,}25,$$

l'erreur possible de ce fait sera de 0,15, 0,5 et 1 pour 1000 respectivement sur ces trois rapports. L'incertitude sur la valeur de la période du radon n'intervient donc pratiquement pas dans la comparaison d'ampoules d'intensité voisine et l'on voit que, même pour des ampoules dont l'intensité serait

(1) Le modèle de la chambre est dû à Debierne et date de l'époque de la comparaison des premiers étalons.

différente dans un rapport de 1 à 4, l'erreur qui peut provenir de là est extrêmement faible.

Pour que la précision ne soit pas illusoire, il est nécessaire que la sensibilité de la chambre, par milligramme de radium, soit rigoureusement la même pour les diverses ampoules. Or les ampoules de radium ont parfois des dimensions sensiblement différentes, et nous avons vu que certaines sont relativement grandes pour la quantité de sel qu'elles contiennent (par exemple 20 mg de sel dans une ampoule de 3 cm de long et 3 mm de diamètre). Il est donc nécessaire d'utiliser des chambres peu sensibles à un petit déplacement de la source, dans le sens de la longueur et dans le sens du diamètre.

La sensibilité par milligramme de radium risque aussi de varier un peu pour des sources d'intensité différente, si le courant d'ionisation n'est pas tout à fait saturé; il convient donc d'avoir des chambres où la collection des ions se fait le mieux possible. Cependant, remarquons qu'il n'est pas nécessaire avec la méthode ci-dessus, que la sensibilité des chambres soit exactement la même pour les diverses intensités de source : il suffit que la sensibilité varie avec l'intensité de la même façon dans les deux chambres, ce qui doit être réalisé si les deux chambres sont identiques.

D'autre part, pour que l'on puisse déterminer avec précision les temps t_A, t_B, t_C, ..., il faut que le courant i varie assez rapidement avec le temps, c'est-à-dire avoir un fort courant I_R dont une faible fraction soit aisément mesurable. Il faut donc des chambres donnant une valeur élevée du courant par millicurie, et naturellement un courant aussi régulier que possible.

Il faut empêcher que la source placée pour agir sur une chambre ne produise un effet sur l'autre chambre; ceci peut être réalisé en mettant les chambres assez loin l'une de l'autre et en installant des écrans de protection convenables.

La précision sur la détermination des temps t_A, t_B, etc. ..., n'indique pas forcément la précision réelle des expériences. Si la sensibilité relative des deux chambres changeait un peu au cours des mesures, cela se verrait immédiatement par l'allure anormale de la variation du courant i, mais on ne fait des mesures que pendant une période de temps de l'ordre de une ou deux heures avant et après les temps t_A, t_B, ..., et si, entre ces périodes, la sensibilité de l'une des deux chambres changeait, ceci produirait seulement sur toute la série de mesures, un décalage d'intensité que l'on ne pourrait reconnaître. Il y a un moyen de vérifier la constance de la sensibilité relative des deux chambres : la chambre I contient une ampoule de radon fixe et la chambre II reçoit successivement les ampoules A, B, C, ...; dans l'intervalle des mesures des ampoules de radium, on met dans la chambre II une autre ampoule de radon à peu près de la même intensité que celle de la chambre I; on mesure alors une faible différence de courant qui doit décroître exponentiellement avec la période du radon, mais la moindre variation de la sensibilité relative des deux chambres produirait sur ce courant une variation notable, que l'on mettrait facilement en évidence.

Chambres d'ionisation. — Les diverses conditions que doivent remplir les chambres ne sont pas faciles à réaliser simultanément. On peut toujours s'arranger pour que l'influence d'un petit déplacement de la source soit faible, si l'on met la source très loin de la chambre, mais ceci ne permet pas d'avoir un fort courant par milligramme de radium. D'autre part, quand le courant d'ionisation est intense, la saturation est plus difficile à obtenir.

La grande chambre d'ionisation de forme plate, utilisée au service de mesure du Laboratoire Curie (*fig.* 1) est satisfaisante à divers points de vue.

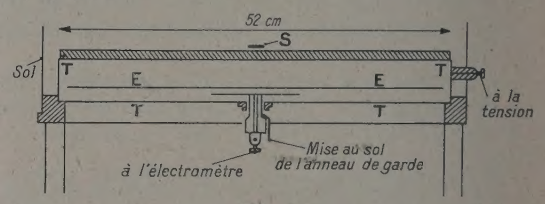


Fig. 1.

La boîte plate cylindrique T est reliée à la tension, le disque E est relié à l'électromètre. La source S est placée au milieu d'un disque de plomb de 1 cm d'épaisseur, de 52 cm de diamètre, qui couvre la chambre. La distance de l'électrode isolée E à la surface supérieure de la boîte T est de 35 mm; cette boîte a une hauteur intérieure de 55 mm. L'électrode est un disque d'aluminium de 2,5 mm d'épaisseur, de 50 cm de diamètre, et la boîte est en laiton nickelé de 1,5 mm d'épaisseur.

Le disque E est vissé sur la plaque reliée à l'électromètre : c'est par erreur qu'il en est isolé sur la figure.

L'intensité par milligramme de radium est assez grande, environ 0,034 u. e. s., et l'influence d'une différence de longueur des sources est très faible, car on peut déplacer une source dans un cercle de 7 cm de rayon, sans avoir de différence de courant supérieure à 0,5 pour 100. La sensibilité à une différence de position en hauteur est de l'ordre de 1 pour 100 pour 3 mm, de sorte qu'il peut être nécessaire d'en tenir compte. La saturation du courant est assez bien réalisée, la distance des électrodes étant seulement de 3,5 cm. Des expériences de comparaison d'ampoules seront prochainement entreprises avec deux chambres de ce type.

Remarquons qu'avec ces chambres qui ne sont pas étanches, il doit y avoir des variations de sensibilité au cours du temps, en raison des changements de température et de pression. En principe ceci ne doit pas avoir d'inconvénient fondamental, pourvu que la variation de la sensibilité soit la même dans les deux chambres; il sera donc important qu'elles soient bien à la même température.

D'autre part, j'ai fait construire des chambres selon le principe représenté dans le schéma de la figure 2. La source est placée au milieu d'un tube

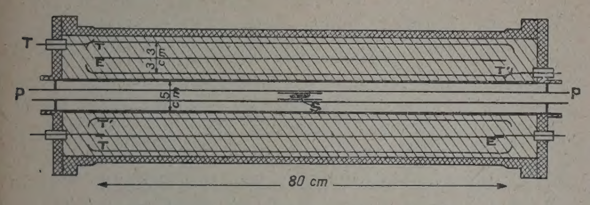


Fig. 2.

Une enveloppe intérieure reliée au sol et pouvant supporter un gaz sous pression (région hachurée) contient la chambre d'ionisation constituée par un cylindre E, relié à l'électromètre, placé entre deux cylindres parallèles T et T′ portés à la tension. La distance des cylindres T et E, ou E et T′ est de 3 cm. Dans le cylindre intérieur, de diamètre 5 cm, on glisse un tube de plexiglas P dans lequel se trouve la source S.

central, entouré par une chambre cylindrique symétrique; on peut prévoir, qu'avec cette disposition, un déplacement de la source dans le sens de sa longueur ou perpendiculairement doit avoir un effet nul en première approximation. La chambre peut être remplie d'un gaz sous pression pour augmenter la sensibilité.

M. Kipfer a réalisé deux chambres du modèle ci-dessus et publiera le dessin d'exécution ainsi que l'étude de l'appareillage.

Remarquons qu'une fois les chambres montées en compensation, il est extrêmement facile de faire les corrections de déplacement d'ampoule, les essais de saturation, etc., en plaçant deux sources de radium presque égales dans les deux chambres et en faisant varier dans une seule chambre la position de l'une des ampoules, la tension, etc.

Essais préliminaires (²). — Avec les chambres cylindriques, remplies de CO_2 à 15 atm de pression, les rayons γ étant filtrés seulement par la paroi de 3 mm de fer de la chambre, le courant produit par une source de 0,1 mg Ra est environ 0,27 u. e. s. On utilise une tension de 1500 V; si l'on place 20 mg de radium dans chacune des chambres et que l'on ajoute ensuite la source de 0,1 mg d'un côté, celle-ci produit à peu près le même courant qu'en l'absence des ampoules de 20 mg, ce qui montre que, pour un courant de l'ordre de 54 u. e. s. dans les chambres, le courant est encore bien proportionnel à l'intensité de la source.

On peut, sans avoir de différence supérieure à 1 pour 1000, déplacer une source de 3 cm de part et d'autre du milieu de la chambre, ou la déplacer perpendiculairement à l'axe, de 3 mm (les ampoules étaient fixées dans des tubes de plexiglass placés selon l'axe des chambres).

La mesure du courant compensé est évidemment d'autant moins précise que la compensation est meilleure; d'après la précision obtenue sur ce courant pour un facteur de compensation déterminé, on calcule que la précision sur la mesure du courant d'ionisation dans les chambres est de l'ordre de $0,5.10^{-4}$.

Quand on met en compensation une ampoule de radium et une ampoule de radon, le moment t_A où le courant est nul peut être déterminé avec une précision d'autant plus grande que le courant dans les deux chambres est plus grand. La figure 3 donne l'exemple des mesures de courant au voisinage de l'intersection pour une ampoule de radium de 20 mg. On voit que l'intersection peut être déterminée à moins de 50 s près, ce qui correspond à une erreur sur l'intensité inférieure à 10^{-4}. Les mesures de courant étaient faites par compensation au moyen d'un quartz piézoélectrique.

La vérification de la sensibilité relative des deux chambres a été faite en mettant une ampoule de radon à la place des ampoules de radium, comme il

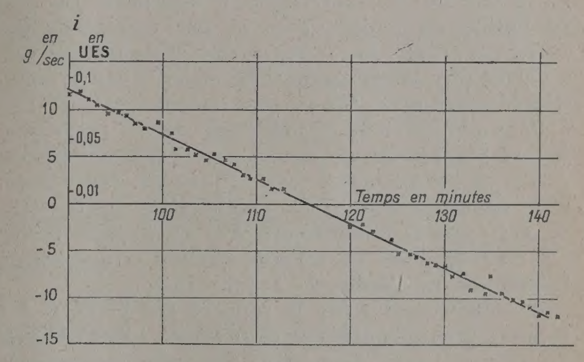


Fig. 3.

Variation du courant i au voisinage du temps d'intersection qui est environ à 115 mn après le moment où l'on avait commencé les mesures. Le courant I dans les chambres est environ égal à 54 u. e. s. On voit que l'écart des mesures par rapport à la droite moyenne est en général inférieur à 0,005 u. e. s., soit 0,1 pour 1000 du courant principal. Au voisinage de l'intersection, la variation relative sur le courant i est trop rapide pour que l'on puisse faire les mesures, mais le moment où l'on observe le courant nul coïncide bien avec l'époque donnée par l'intersection de la droite avec l'axe d'intensité 0.

La lame de quartz donne 7,4 u. e. s. de charge électrique pour 1 kg posé sur le plateau. Le courant est exprimé en « grammes par seconde ».

a été dit plus haut. Au cours d'une expérience qui a duré 7 jours, et au cours de laquelle 15 ampoules ont été comparées, la sensibilité relative des chambres est restée remarquablement constante.

Les expériences d'essai ont montré que la préci-

(²) Ces essais, auxquels j'ai participé, ont été faits principalement par M. Kipfer et par M. Lecoin, et seront l'objet d'une publication par la suite.

sion des mesures est certainement très supérieure à 1 pour 1000, mais avec les étalons dont on dispose, la précision réelle est plus faible. Ces ampoules contiennent une quantité de sel de radium qui produit une absorption appréciable de son propre rayonnement; la correction due au verre des ampoules n'est pas négligeable non plus. Il y a une incertitude importante sur ces corrections, du fait que l'on ne sait pas quelle est la proportion de radon occlus dans le sel ou réparti dans l'ampoule; la grosseur des grains du sel de radium a aussi une importance; enfin dans les ampoules de dimensions relativement grandes, préparées par Hönigschmidt, le sel peut se déplacer beaucoup : on essaye de le répartir aussi uniformément que possible, mais on ne peut pas être sûr d'avoir toujours la même répartition. Si le sel est tassé à un bout du tube, l'absorption est beaucoup plus grande.

Pour diminuer ces inconvénients, il faut filtrer le rayonnement γ par une épaisseur de métal équivalente à plus de 5 mm de plomb afin d'utiliser seulement les rayons les plus pénétrants du dépôt actif, mais même alors les corrections sont notables. Ainsi pour un étalon contenant environ 24 mg de radium et dont la paroi est de 0,27 mm de verre, on a calculé une correction d'absorption du sel de l'ordre de 6 pour 1000 et une correction du verre de l'ordre de 3 pour 1000; l'absorption du sel peut être encore plus forte si les cristaux sont relativement gros. On se rend compte qu'avec les étalons qui existent actuellement, même en répartissant le sel le mieux possible, on a bien une incertitude de l'ordre de 30 pour 100 sur les corrections, et la précision réelle sur la comparaison des étalons ne doit pas être supérieure à 2 ou 3 pour 1000. Du reste la pesée du sel doit comporter aussi une incertitude de l'ordre de 1 pour 1000.

Les différences entre le rapport des poids et le rapport des rayonnements de plusieurs tubes ont été au plus de 4 pour 1000, dans des expériences faites avec la seule filtration du tube central de la chambre. On pourra sans doute améliorer un peu la précision en utilisant une filtration plus grande.

Un essai fait dans ce sens a donné de mauvais résultats, parce que la filtration était réalisée avec un tube de fer épais dont le canal central était trop étroit. Or on peut voir géométriquement que si la source est trop proche du tube absorbant, la moindre différence dans sa position radiale change notablement l'épaisseur de métal traversée, de sorte que l'on ne peut comparer correctement des ampoules de diamètre un peu différent. Il est nécessaire que les sources soient placées dans un tube d'une matière peu absorbante et que le tube absorbant, pas trop épais, soit appliqué contre la paroi intérieure de la chambre d'ionisation. On pourra sans doute faire des mesures dans de bonnes conditions avec un tube de plomb de 5 à 10 mm d'épaisseur, de diamètre extérieur égal au canal central, soit 5 cm.

Cependant, le plus commode sera peut-être de faire des mesures au moyen de deux condensateurs plats du type de la figure 1. Naturellement la précision sera moins grande, le courant étant beaucoup moins intense, mais elle sera sans doute suffisante étant donné la nature des étalons que l'on a à mesurer.

Les nouvelles chambres cylindriques permettront de déterminer avec beaucoup plus de précision la période du radon, et elles pourront servir à comparer des étalons de radium avec une précision très supérieure à 1 pour 1000 quand on aura des ampoules permettant une telle précision.

Possibilités offertes par l'emploi des ampoules de radon dans les étalonnages. — La méthode consistant à comparer entre elles les ampoules de radium en utilisant une ampoule de radon comme étalon d'intensité variable ne permet une très grande précision que combinée avec la méthode de compensation. Cependant elle n'est pas sans intérêt même quand on ne dispose que d'une seule chambre, sur laquelle on place alternativement l'ampoule de radium et l'ampoule de radon. En effet, on peut déterminer par des séries de mesures alternées les temps t_A, t_B, t_C, où l'ampoule de radon donne la même intensité que les ampoules A, B, C, et en déduire le rapport de ces ampoules. Cette détermination peut être meilleure que la détermination directe du rapport des intensités des courants d'ionisation, parce que la méthode revient à comparer des courants égaux, ce qui élimine un certain nombre de causes d'erreurs, en particulier celles qui peuvent provenir d'une saturation imparfaite du courant d'ionisation, si les ampoules sont d'intensité assez différente. On peut aussi déterminer le temps t_A avec un appareil de mesure et le temps t_B avec un autre appareil, plus sensible, si la source B est beaucoup plus faible que la source A.

Ainsi, par l'intermédiaire du radon, il est possible d'étalonner des ampoules de radium beaucoup plus faibles ou beaucoup plus fortes que les étalons pesés, qui contiennent ordinairement 20 ou 30 mg de radium. La précision de 0,5 pour 1000 sur la période du radon permet déjà de comparer deux ampoules de radium différant d'un facteur 100, avec une précision supérieure à 0,5 pour 100. Il est certainement possible de déterminer la période du radon avec une précision de l'ordre de 10^{-4}, en utilisant les nouvelles chambres, ce qui augmentera encore les possibilités offertes par cette méthode.

Naturellement, dans le cas d'ampoules de radium beaucoup plus fortes que les étalons, contenant par exemple plusieurs centaines de milligrammes de radium, la correction d'absorption par le sel devient très importante, mais bien souvent il n'est pas nécessaire de faire cette correction, quand on s'intéresse à l'intensité du rayonnement qui sort de l'ampoule et non à la quantité de radium qu'elle contient.

Les ampoules de radon peuvent aussi servir d'auxiliaire pour la détermination précise du rapport de sources de rayonnement γ pénétrant autres que les ampoules de radium. Les conditions sont théoriquement un peu moins bonnes, parce que si la sensibilité des deux chambres changeait un peu, par suite de variations de température ou pour toute autre raison, la variation pourrait être un peu différente si le rayonnement γ est différent, alors qu'elle devrait être identique quand les rayonnements sont identiques dans les deux chambres. En pratique s'il s'agit de rayonnements γ filtrés par plus de 5 mm de plomb, il est probable que ceci intervient peu.

Le radon peut être utilisé pour résoudre la difficulté pratique qui consiste à comparer des étalons de radium qui se trouvent dans des pays différents. Le transport d'ampoules de radium est une opération ennuyeuse à cause de la valeur du produit et des formalités de douane. Le radon, produit de faible valeur, peut être expédié bien plus facilement, On peut mesurer avec précision une ampoule de radon par rapport à un étalon de radium, à Paris par exemple, puis expédier le radon par avion dans un autre pays, où il sera comparé à une autre ampoule de radium que l'on veut étalonner.

J'adresse mes remerciements à l'Union Minière du Haut-Katanga, qui a assumé les frais de construction et d'installation des chambres d'ionisation dans ses locaux de Bruxelles et a permis à son physicien, M. Kipfer, de consacrer une partie de son temps à l'étude de ces chambres et aux expériences préliminaires de comparaisons d'étalons.

Je remercie aussi M. Kipfer, qui a construit et étudié les chambres et M. Lecoin, qui a contribué à établir les conditions de mesures et participé à celles-ci. M. Kipfer a remis à la commission mixte de radioactivité, en juillet 1953, un rapport sur les premières comparaisons d'étalons effectuées par nous en 1953.

Manuscrit reçu le 13 mai 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Curie M. — *J. Physique Rad.*, 1912, **2**, 795.
[2] Curie M. — *J. Physique Rad.*, 1933 **4**, 459.
[3] Curie I. et Chamié C. — *J. Physique Rad.*, 1924, **5**, 238.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 15, DÉCEMBRE 1954, PAGE 795.

THÉORIE CINÉTIQUE DES PLASMAS HOMOGÈNES FAIBLEMENT IONISÉS. I.

Par Michel BAYET,
Faculté des Sciences de Toulouse,
Jean-Loup DELCROIX,
École Normale Supérieure, Laboratoire de Physique, Paris
et Jean-François DENISSE,
Observatoire de Paris, Section d'Astrophysique.

Sommaire. — On définit une méthode rigoureuse d'intégration de l'équation de Boltzmann par approximations successives pour un gaz faiblement ionisé placé dans un champ électrique alternatif et un champ magnétique continu. On développe la fonction de distribution des vitesses électroniques par rapport au champ électrique en posant

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots;$$

puis on développe chaque fonction f_i en fonctions sphériques.

Dans cette première partie la méthode est appliquée au modèle de Lorentz parfait des gaz électrons-molécules (on néglige totalement les échanges d'énergie entre électrons et molécules). On montre que la méthode des fonctions sphériques réussit particulièrement bien parce que les fonctions sphériques sont des fonctions propres de l'opérateur intégral J qui figure au second membre de l'équation de Boltzmann et qui représente l'effet des chocs. On montre que cette propriété est générale et que les valeurs propres s'interprètent physiquement comme étant des fréquences de relaxation des anisotropies du plasma, la première d'entre elles, ν_1, coïncidant avec la fréquence des chocs classique dont la définition est en général assez arbitraire. On effectue ensuite le calcul des approximations d'ordre 0, 1 et 2 par rapport au champ électrique; l'approximation d'ordre 1 permet d'étudier le tenseur de conductivité du plasma; l'approximation d'ordre 2, ainsi que le cas du « gaz de Lorentz imparfait », seront traités dans des articles ultérieurs.

1. Introduction. — *a*. NOTION DE GAZ DE LORENTZ. — On appelle gaz de Lorentz un gaz constitué de deux types de particules : des « particules lourdes P » de masse M à raison de N par unité de volume, et des « particules légères p » de masse m en nombre beaucoup plus restreint, soit n par unité de volume; par définition on a donc

$$n \ll N, \qquad (1)$$
$$m \ll M. \qquad (2)$$

Un tel gaz jouit des deux propriétés fondamentales suivantes :

1° par suite de la relation (1), chaque particule p peut être considérée comme se déplaçant individuellement dans un gaz de particules P;

2° par suite de la relation (2), au cours d'un choc p — P, il n'y a qu'un très faible échange d'énergie entre les deux particules.

Nous dirons que le gaz de Lorentz est parfait si les rapports $\frac{n}{N}$ et $\frac{m}{M}$ sont considérés comme nuls de telle sorte qu'on peut négliger complètement l'interaction p — p et l'échange d'énergie dans un choc p — P. Si, au contraire, on tient compte des corrections du premier ordre en $\frac{n}{N}$ (faible interaction p — p) et en $\frac{m}{M}$ (faible échange d'énergie dans un choc p — P), nous dirons que le gaz de Lorentz est imparfait.

On rencontre des gaz de Lorentz dans l'étude des phénomènes physiques suivants :

— diffusion d'un gaz léger dans un gaz lourd;
— diffusion des neutrons dans les réacteurs nucléaires;
— diffusion des électrons dans les métaux et les semi-conducteurs;
— diffusion des électrons dans les gaz ionisés.

b. GAZ DE LORENTZ ÉLECTRONS-MOLÉCULES. — Le présent article est consacré au cas particulier où les particules p sont des électrons et les particules P des molécules à symétrie sphérique; ce modèle permet de représenter assez correctement les propriétés des plasmas de décharge : un tel milieu contient n électrons, n' ions positifs et N molécules neutres par unité de volume; on suppose d'ordinaire $n = n'$ tout au moins en moyenne ce qui n'est, en général, possible que si l'on néglige les effets dus aux parois. En tous cas les plasmas qu'on étudie au laboratoire sont généralement peu ionisés de sorte qu'on a simultanément $n \ll N$ et $n' \ll N$; passer de ce cas réel au modèle de Lorentz c'est supposer n' assez faible pour que les effets dus aux ions positifs soient négligeables; ceci mérite discussion puisque, comme nous venons de le voir, n et n' sont du même ordre; la discussion repose sur deux points : tout d'abord si nous désirons étudier seulement les propriétés électromagnétiques du milieu, c'est-à-dire les déplacements pris par les charges électriques sous l'influence de champs électriques et magnétiques nous pouvons négliger les mouvements des ions qui du fait de la différence des masses sont d'amplitudes bien inférieures à ceux des électrons. Ceci dit, les mouvements des électrons résultent des champs appliqués et des interactions entre particules soient :

— interactions électron-électron : e — e;
— interactions électron-ion : e — P^+;
— interactions électron-molécule neutre : e — P.

On est tenté de considérer comme négligeables les deux premiers mécanismes devant le troisième en s'appuyant sur le fait que l'on a

$$n \ll N \quad \text{et} \quad n' \ll N;$$

en fait, les particules chargées ont proportionnellement un effet beaucoup plus important que les molécules : du fait du grand rayon d'action de la force de Coulomb tout se passe comme si chaque particule chargée occupait un volume efficace bien plus grand que celui occupé par une molécule neutre; il est par suite nécessaire que n et n' soient de plusieurs ordres de grandeurs inférieurs à N pour qu'on puisse ne tenir compte que des interactions e — P [1]. Si, au contraire, l'ionisation est importante comme c'est le cas dans les atmosphères stellaires les interactions e — P^+ deviennent importantes; cela ne veut pas dire qu'on a un gaz de Lorentz e — P^+ parce que la relation (1) n'est pas satisfaite de sorte que l'interaction entre les électrons est aussi importante.

c. LOI DE FORCE ÉLECTRON-MOLÉCULE. — La force d'interaction e — P sera supposée centrale; nous n'aurons que fort peu à préciser la loi de force; notons cependant que, si l'on suppose que les électrons polarisent les molécules proportionnellement au champ qu'ils créent, c'est-à-dire à $\frac{1}{r^2}$, on obtient une force d'interaction électron-dipole induit en

$$\frac{1}{r^2} \times \frac{1}{r^3} = \frac{1}{r^5};$$

une loi analogue a été considérée par Maxwell qui a montré comme nous le verrons plus loin qu'elle conduisait à des résultats particulièrement simples; mais la force considérée était une force de répulsion alors que la force électron-dipole induit est une force d'attraction analogue aux forces de cohésion en $\frac{1}{r^7}$ de Van der Waals-London qui s'exercent entre deux molécules [2]. Il est certain que pour les faibles valeurs de r on a une force de répulsion à variation rapide, par exemple $\frac{a}{(r - r_0)^s}$, s étant élevé; l'étude exacte de cette répulsion est du

domaine de la mécanique quantique; le cas de molécules sphériques impénétrables conduirait à $s = \infty$.

Il ressort de cette discussion rapide que la loi de force est, en général, assez compliquée et mal connue; heureusement du point de vue formel il nous suffira de savoir que la force est toujours centrale; c'est seulement pour préciser les valeurs numériques de certains résultats qu'il est nécessaire de connaître exactement la loi de force; les phénomènes dépendront d'ailleurs dans une certaine mesure de la densité du gaz; en effet, pour les faibles densités les interactions à longue distance sont relativement plus importantes que pour les fortes densités.

d. Théories des gaz de Lorentz électrons-molécules en présence de champs électromagnétiques. — Si l'on soumet un gaz de Lorentz électrons-molécules à un champ électrique **E** et à un champ magnétique **H** la distribution des vitesses des électrons est différente de celle qu'on aurait en l'absence de champs; l'étude théorique de cette distribution et des propriétés électromagnétiques macroscopiques du gaz qui en découlent a été abordée par de nombreux auteurs en commençant par les cas les plus simples :

Lorentz [3] a étudié le cas d'un champ électrique E continu sans champ magnétique;

Chapman et Cowling [4], le cas d'un champ E continu superposé à un champ magnétique H continu;

Margenau (5) le cas d'un champ E alternatif sans champ magnétique;

Jancel et Kahan [6] le cas d'un champ E alternatif superposé à un champ magnétique H continu. Le cas des champs magnétiques alternatifs est peu intéressant car en pratique un champ H alternatif est toujours associé d'après les équations de Maxwell à un champ E alternatif et l'ordre de grandeur du rapport $\frac{E}{H}$ est tel que les forces magnétiques agissant sur les électrons sont négligeables devant les forces électriques tant que la vitesse des électrons est faible devant la vitesse de la lumière. Le problème traité par Jancel et Kahan représente donc pratiquement le cas général. Toutefois, nous avons montré [7] que leur formalisme n'est pas adapté à ce cas et nous y reviendrons plus loin.

Nous avons été amenés de ce fait à reprendre la question de façon plus complète; afin d'établir une théorie cohérente et rigoureuse, nous nous sommes tout d'abord limité strictement à l'étude du gaz de Lorentz parfait; les paragraphes 2, 3, 4, 5 de cet article et de l'article suivant sont consacrés à cette étude; nous montrerons, dans un troisième article que les hypothèses du gaz de Lorentz parfait ne sont pas exactement réalisées en pratique et analyserons les conséquences qui en résultent.

2. **Exposé de la méthode.** — *a.* Équation de Boltzmann. — Soient $f(\mathbf{v}, t)$ la fonction de distribution des électrons à l'instant t et $F(\mathbf{V}, t)$ celle des molécules neutres; le gaz est supposé *uniforme et indéfini*, c'est-à-dire que f et F ne dépendent pas du point considéré et qu'on a à tout instant et en tout point

$$\iiint f(\mathbf{v}, t)\, \underline{\mathrm{d}v} = n, \qquad (3)$$

$$\iiint F(\mathbf{V}, t)\, \underline{\mathrm{d}V} = N, \qquad (4)$$

(la notation $\underline{\mathrm{d}v}$ représente un élément de volume $\mathrm{d}v_x\, \mathrm{d}v_y\, \mathrm{d}v_z$ dans l'espace des vitesses). Les deux fonctions f et F satisfont à deux équations de Boltzmann; l'équation de Boltzmann s'écrit de façon générale :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{g}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = C$$

dans laquelle

$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}$ = gradient de f dans l'espace des positions (ou espace de configuration);

$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ = gradient de f dans l'espace des vitesses (ou espace hodographe);

g, est l'accélération imposée aux particules, c'est-à-dire la force par unité de masse.

Cette équation exprime que la variation au cours du temps de f est due aux phénomènes de diffusion $\left(-\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\right)$, à l'action des forces appliquées $\left(-\mathbf{g}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right)$ et des chocs entre particules représentés par le terme C.

Dans le cas présent, nous avons pour f et F les deux équations :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta(F), \qquad (5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{\Gamma} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{\Omega})\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = J(f). \qquad (6)$$

Dans les deux équations, nous avons négligé les termes en $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$, le gaz étant supposé uniforme; pour les molécules il n'y a pas non plus de terme en $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$ (pas de force appliquée); le terme de chocs $\Delta(F)$ ne représente d'autre part que les chocs entre molécules; par suite de la relation (2), les chocs électron-molécule sont en effet sans influence sur la distribution des vitesses des molécules. En définitive, l'équation en F est l'équation habituelle des gaz uniformes dont la solution stationnaire est la distribution maxwellienne :

$$F = N\left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{MV^2}{2kT}}. \qquad (7)$$

Dans l'équation en f nous avons posé :

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{e\mathbf{E}}{m}, \quad \mathbf{\Omega} = \frac{e\mathbf{H}}{m} \quad \text{(u. e. m)}, \tag{8}$$

e devant être pris négatif dans le cas des électrons.

Le terme $J(f)$ représente l'effet des chocs; conformément aux hypothèses exposées au paragraphe 1 nous ne tenons compte que des chocs électrons molécules. On montre dans les traités de théorie cinétique que $J(f)$ est fournie par l'intégrale:

$$J(f) = \iiiint\!\!\int (f'F' - fF)\, gp\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}\varepsilon\, \underline{\mathrm{d}V}. \tag{9}$$

Rappelons le sens de cette intégrale quintuple; un choc p — P est caractérisé par la donnée de huit paramètres : les composantes v_x, v_y, v_z et V_x, V_y, V_z des deux vecteurs vitesses des particules longtemps avant le choc, et deux paramètres géométriques précisant les positions relatives de ces deux vecteurs; les deux paramètres choisis ici sont ainsi définis : on considère un plan Π passant à tout instant par la molécule P et perpendiculaire à la vitesse relative des deux particules avant le choc pour un observateur se déplaçant avec ce plan

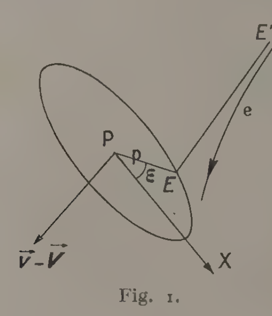


Fig. 1.

l'asymptote à la trajectoire de l'électron avant le choc est une droite EE' perpendiculaire en E à Π (*fig.* 1); la position de cette asymptote est déterminée par les deux coordonnées polaires p et ε du point E dans le plan Π.

Ceci dit dans l'intégrale (9) on suppose donné $\mathbf{v}$ et l'on fait varier $\mathbf{V}$, p et ε; on a posé :

$$f = f(\mathbf{v}, t),$$
$$F = F(\mathbf{V}, t),$$
$$g = |\mathbf{v} - \mathbf{V}|.$$

Longtemps après le choc les deux vecteurs vitesses sont devenus $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{V}'$, ces deux vecteurs sont fonction de $\mathbf{V}$, p et ε et l'on a posé dans (9)

$$f' = f(\mathbf{v}', t),$$
$$F' = F(\mathbf{V}', t).$$

On peut remarquer que de manière générale les cinq variables d'intégration figurant dans J ne se séparent pas; la forme de J se simplifie, au contraire, dans le cas du gaz de Lorentz parfait si l'on peut, de plus, négliger $\mathbf{V}$ devant $\mathbf{v}$, on a alors :

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}$$

(le choc d'un électron ne perturbe pas le mouvement d'une molécule),

$$g = |\mathbf{v}| = v$$

$\mathbf{v}'$ est indépendant de $\mathbf{V}$ (pour la même raison)

$$|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|. \tag{10}$$

Dans ces conditions, l'intégration sur $\mathbf{V}$ se sépare des intégrations sur p et ε; on a

$$J(f) = \iiint F(\mathbf{V}, t)\, \underline{\mathrm{d}\mathbf{V}} \iint (f' - f)\, vp\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}\varepsilon,$$

soit en effectuant la première intégration et en faisant sortir v

$$J(f) = Nv \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} (f' - f)\, p\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}\varepsilon; \tag{11}$$

J est maintenant un opérateur agissant sur la fonction f; cet opérateur est indépendant de F; il est linéaire; par contre, sa forme exacte dépend de la loi de choc (à travers f').

b. Développement de l'équation de Boltzmann en fonction du paramètre Γ. — Pour obtenir des solutions de l'équation (6) on est conduit d'abord à développer f en série de fonctions sphériques; ce choix se verra justifié plus loin. On trouve alors que l'équation de Boltzmann est équivalente à une suite infinie d'équations différentielles linéaires, couplées entre elles par l'intermédiaire du champ électrique Γ. Si l'on suppose que Γ est faible, on peut obtenir des solutions convergentes pour ces équations, et nous nous limiterons à ce cas dans cet article. L'exposé se simplifie si l'on commence par développer f en fonction de Γ. Nous poserons donc

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots \tag{12}$$

en supposant par hypothèse que f_0 est indépendant de Γ, que f_1 est du premier ordre en Γ, f_2 du deuxième ordre, etc., Γ n'est pas un paramètre sans dimension; en fait, la suite du calcul montre que pour que le développement de f soit convergent, il faut que Γ soit assez petit pour que l'accroissement de vitesse pris par chaque électron entre deux chocs du fait du champ électrique soit faible devant sa vitesse moyenne, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{\Gamma}{\nu}\, \frac{1}{v_0} \ll 1, \tag{13}$$

ν étant la fréquence moyenne des chocs que nous définirons ultérieurement.

Introduisons donc le développement (12) dans

l'équation (9) et séparons les termes d'ordre o, 1, 2, ... en Γ; il vient :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{\Omega} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = J(f_0), \quad (14)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{\Gamma} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} = J(f_1), \quad (15)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \mathbf{\Gamma} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}} = J(f_2), \quad (16)$$

c. Développement des fonctions de distribution en série de fonctions sphériques. — Pour satisfaire les équations (14), (15), (16) etc., nous allons maintenant développer les diverses fonctions f_0, f_1, f_2, ... en série de fonctions sphériques ou plus précisément poser :

$$f_0 = \sum (a_{lm} C_{lm} + a'_{lm} S_{lm}), \quad (17)$$

$$f_1 = \sum (b_{lm} C_{lm} + b'_{lm} S_{lm}) \quad (18)$$

$$f_2 = \sum (c_{lm} C_{lm} + c'_{lm} S_{lm}) \quad (19)$$

....

Les fonctions C_{lm} et S_{lm} sont les fonctions sphériques classiques :

$$C_{lm} = v^l \Theta_{lm} \cos m\varphi, \quad (20)$$

$$S_{lm} = v^l \Theta_{lm} \sin m\varphi; \quad (21)$$

l peut varier de o à ∞ et pour chaque valeur, m peut varier de o à l mais $S_{lo} = 0$; Θ est fonction de θ seulement. Le tableau I donne en coordonnées sphériques et en coordonnées cartésiennes les expressions [9] des premières fonctions C_{lm} et S_{lm}.

Tableau I.

	Coordonnées sphériques.	Coordonnées cartésiennes.
C_{00}.......	1	1
C_{10}.......	$v \cos\theta$	v_z
C_{11}.......	$v \sin\theta \cos\varphi$	v_x
S_{11}.......	$v \sin\theta \sin\varphi$	v_y
C_{20}.......	$\frac{v^2}{2}(3\cos^2\theta - 1)$	$\frac{3v_z^2 - v^2}{2}$
C_{21}.......	$3v^2 \sin\theta \cos\theta \cos\varphi$	$3v_z v_x$
S_{21}.......	$3v^2 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi$	$3v_z v_y$
C_{22}.......	$3\sin^2\theta \cos 2\varphi$	$3(v_x^2 - v_y^2)$
S_{22}.......	$3\sin^2\theta \sin 2\varphi$	$6v_x v_y$

Nous supposons que les coefficients a_{lm}, a'_{lm},... sont des fonctions « isotropes » de $\mathbf{v}$, c'est-à-dire des fonctions de $v = |\mathbf{v}|$; nous devrons d'ailleurs supposer qu'ils sont aussi fonction de t pour pouvoir représenter les distributions variables avec le temps qui se produisent nécessairement si $\mathbf{\Gamma}$ est lui-même fonction de t. Ceci dit, si l'on porte les développements (17), (18) et (19) dans les équations (14), (15) et (16) on obtient en effectuant les calculs et ordonnant par rapport aux fonctions sphériques un système du type :

$$\left.\begin{aligned} &\sum (\alpha_{lm} C_{lm} + \alpha'_{lm} S_{lm}) = 0, \\ &\sum (\beta_{lm} C_{lm} + \beta'_{lm} S_{lm}) = 0, \\ &\sum (\gamma_{lm} C_{lm} + \gamma'_{lm} S_{lm}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

qu'on peut satisfaire en imposant

$$\alpha_{lm} = \alpha'_{lm} = \beta_{lm} = \beta'_{lm} = \gamma_{lm} = \gamma'_{lm} = 0 \quad (B)$$

On obtient ainsi un système d'équations différentielles en t déterminant les coefficients a_{lm}, a'_{lm}, ... Si les coefficients α_{lm}, β_{lm}, ... étaient indépendants de $\mathbf{v}$ les systèmes (A) et (B) seraient équivalents à la seule condition que les C_{lm} et S_{lm} forment une suite de fonctions orthogonales dans un domaine quelconque de l'espace des vitesses. En fait nous avons supposé que les coefficients a_{lm}, a'_{lm} étaient non pas des constantes à chaque instant, mais des fonctions isotropes de $\mathbf{v}$; cela simplifie beaucoup les calculs; on peut s'en rendre compte en remarquant que a_{00} représente alors à lui tout seul la fonction de distribution isotrope non perturbée. Dans ces conditions il est facile de voir que les α_{lm}, α'_{lm} sont aussi des fonctions isotropes de $\mathbf{v}$ et que les systèmes (A) et (B) ne sont alors équivalents que si les fonctions C_{lm} et S_{lm} sont othogonales sur une sphère quelconque centrée à l'origine de l'espace des vitesses : d'où l'emploi des fonctions sphériques. Ces fonctions ont d'ailleurs un autre avantage : les opérateurs $\mathbf{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$, $\mathbf{v} \wedge \Omega \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$ et J qui interviennent dans (14), (15) et (16) donnent des résultats relativement simples quand ils agissent sur une fonction sphérique comme nous allons le voir.

d. Choix des axes. Action des opérateurs $\mathbf{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$ J sur une fonction sphérique. — Nous pouvons sans restreindre la généralité du problème

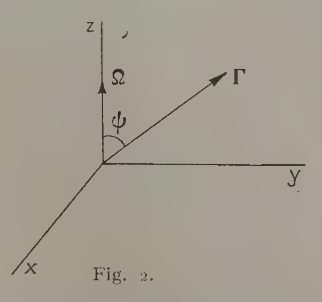


Fig. 2.

supposer que $\mathbf{\Omega}$ est dirigé suivant Oz et que $\mathbf{\Gamma}$ est dans le plan yOz (*fig.* 2)

$$\widehat{O\Gamma} . \widehat{O\Omega} = \psi.$$

Ceci dit, nous avons les règles de calculs suivantes :

$$\Gamma \frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\Gamma \sin\psi}{2}[-S_{l-1,m+1} - (l+m)(l+m-1)S_{l-1,m-1}] + \Gamma\cos\psi(l+m)C_{l-1,m}, \quad (22)$$

$$\Gamma \frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\Gamma \sin\psi}{2}[C_{l-1,m+1} + (l+m)(l+m-1)C_{l-1,m-1}] + \Gamma\cos\psi(l+m)S_{l-1,m}; \quad (23)$$

$$\mathbf{v}\wedge\boldsymbol{\Omega}\frac{\partial C_{lm}}{\partial \mathbf{v}} = m\Omega S_{lm}, \quad (24)$$

$$\mathbf{v}\wedge\boldsymbol{\Omega}\frac{\partial S_{lm}}{\partial \mathbf{v}} = -m\Omega C_{lm}; \quad (25)$$

$$J(C_{lm}) = -\nu_l C_{lm}, \quad (26)$$

$$J(S_{lm}) = -\nu_l S_{lm}. \quad (27)$$

Ces diverses formules [1] sont démontrées dans l'appendice qui paraîtra à la fin de l'article suivant ; les deux dernières sont tout à fait remarquables : elles montrent que les fonctions sphériques sont des fonctions propres de l'opérateur J, la valeur propre ν_l ne dépendant que de l'indice l. Ceci provient du fait que par suite de l'hypothèse des forces centrales J commute avec le groupe des rotations; il faut toutefois remarquer que dans le calcul de J on considère alors v comme un paramètre et que les valeurs propres ν_l sont des fonctions de v. On peut aussi remarquer que la première d'entre elles ν_0 est nulle puisque, d'après (10) et (11), $J(f)$ est nul quand f est une fonction isotrope.

3. Calcul de l'approximation d'ordre zéro. — *a*. Calcul des coefficients a_{lm}. — Portons le développement (17) dans l'équation (14); il vient en utilisant les formules (24) à (27) :

$$\sum(\dot a_{lm}C_{lm} + \dot a'_{lm}S_{lm}) + \sum \nu_l(a_{lm}C_{lm} + a'_{lm}S_{lm}) = \Omega\sum m(a'_{lm}C_{lm} - a_{lm}S_{lm});$$

en ordonnant par rapport aux fonctions sphériques et en annulant le coefficient de chacune nous obtenons :

$$\dot a_{00} = 0 \qquad (C_{00}), \quad (28)$$

$$\dot a_{10} + \nu_1 a_{10} = 0 \qquad (C_{10}), \quad (29)$$

$$\dot a_{11} + \nu_1 a_{11} = \Omega a'_{11} \qquad (C_{11}),$$

$$\dot a'_{11} + \nu_1 a'_{11} = -\Omega a_{11} \qquad (S_{11}).$$

. . . .

$$\dot a_{l_0} + \nu_l a_{l_0} = 0 \qquad (C_{l_0}), \quad (30)$$

$$\dot a_{lm} + \nu_l a_{lm} = m\Omega a'_{lm} \quad (C_{lm}) \quad (31)$$

$$\dot a'_{lm} + \nu_l a'_{lm} = -m\Omega a_{lm} \quad (S_{lm}) \quad (m \neq 0). \quad (32)$$

[1] Dans l'équation (8) du travail de Jancel et Kahan, le terme en $\frac{m_2}{e_2}H^2$ est considéré par erreur comme un terme en $\boldsymbol{\Gamma}_2\mathbf{v}_2$; c'est en réalité avec nos notations un terme en v_y. Il s'ensuit une erreur que nous avons signalée [7] dans l'expression du tenseur de conductivité ainsi que dans les autres formules qui en sont déduites. D'ailleurs la forme que ces auteurs ont choisie pour la fonction de distribution n'est pas assez générale et ne permet pas de représenter les termes en v_y.

La première de ces équations est singulière; sa solution est

$$a_{00}(t) = a_{00}(0). \quad (33)$$

Pour les autres, on obtient sans difficulté les solutions suivantes :

$$a_{l_0} = A_{l_0}e^{-\nu_l t}, \quad (34)$$

$$a_{lm} = A_{lm}e^{-\nu_l t}\cos(\varphi_{lm} - m\Omega t), \quad (35)$$

$$a'_{lm} = A_{lm}e^{-\nu_l t}\sin(\varphi_{lm} - m\Omega t). \quad (36)$$

Dans ces formules les quantités A_{lm} et φ_{lm} sont des fonctions de v complètement déterminées si l'on se donne la fonction de distribution des vitesses à l'instant $t = 0$.

b. Interprétation physique. — Nous verrons au paragraphe suivant que tous les coefficients ν_l sont positifs; dans ces conditions on peut faire les remarques suivantes :

Quelle que soit la forme de la distribution f_0 à l'instant $t = 0$ elle devient isotrope au bout d'un certain temps; les anisotropies initiales représentées par les coefficients a_{lm} et a'_{lm} $(l \neq 0)$ ne demeurent que pendant une période transitoire. La décroissance de chaque ordre d'anisotropies est caractérisée par le nombre ν_l qu'on peut appeler *fréquence de relaxation des anisotropies d'ordre l.* Divers auteurs avant nous [4], [6], [7] ont considéré le nombre ν_1 et montré qu'il était égal à la fréquence des chocs dans le cas de molécules impénétrables sans interaction à distance; cette interprétation est impossible dans le cas général où il y a des interactions à distance, car on ne peut plus définir une fréquence de choc. Notre calcul montre quelle est la signification profonde des nombres ν_l.

Quand on a atteint le régime permanent, la fonction de distribution isotrope $a_{00}(t)$ qui reste est identique à la partie isotrope de la fonction de distribution initiale; ceci est une conséquence évidente des hypothèses de départ; la formule (10) montre en effet que les électrons dont la vitesse a une valeur absolue donnée forment une classe qui se conserve dans les chocs.

c. Calcul des fréquences de relaxation ν_l. — Pour expliciter un peu ν_l, appliquons la formule (26) au cas particulier :

$$m = 0, \qquad \theta = 0$$

représenté sur la figure 3.

La colatitude $\theta' = \chi$ après le choc n'est autre que la déviation; elle ne dépend que de p.

Dans ces conditions, on a :

$$C_{l0}(\theta) = v^l P_l(\cos\theta)$$

(P_l, polynome de Legendre d'ordre l),

$$C_{l0}(0) = v^l,$$
$$C_{l0}(\theta') = v^l P_l(\cos\chi),$$

$$J[C_{l0}(0)] = -\nu_l C_{l0}(0) = Nv\int_0^\infty\int_0^{2\pi}[v^l P_l(\cos\chi) - v^l]\,p\,dp\,d\varepsilon,$$

$$-\nu_l v^l = 2\pi N v^{l+1}\int_0^\infty [P_l(\cos\chi) - 1]\,p\,dp,$$

$$\boxed{\nu_l = 2\pi N v\int_0^\infty [1 - P_l(\cos\chi)]\,p\,dp.} \qquad (37)$$

Cette formule généralise celles obtenues par Chapman et Cowling (10) pour $l = 1$ et $l = 2$. Si l'on

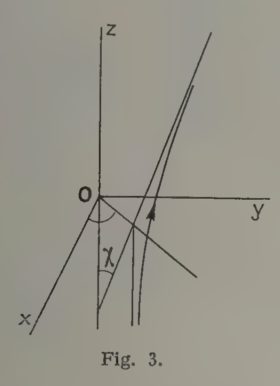


Fig. 3.

connaît la loi de force, on peut calculer χ en fonction de p et v et en déduire par la formule ci-dessus les diverses fréquences de relaxation. Elles sont toujours positives puisqu'on a toujours $P_l(\cos\chi) \leq 1$. Dans le cas des molécules sphériques impénétrables, χ n'est fonction que de p, les ν_l sont proportionnels à v, ce qui correspond comme on sait à un libre parcours moyen indépendant de la vitesse. Dans le cas plus général d'une loi de forces en r^{-s}, ν_l est *proportionnel à* $v^{\frac{s-5}{s-1}}$; dans le cas où $s = 5$, ν_l est indépendant de v, résultat remarquable, connu depuis Maxwell [11] pour la fréquence ν_1 et qui simplifie énormément les calculs [12].

4. Calcul de l'approximation du premier ordre. — *a.* Calcul des coefficients b_{lm}. — Supposons maintenant le champ électrique alternatif en posant :

$$\Gamma = \gamma\cos\omega t \qquad (38)$$

et portons les développements (17) et (18) dans l'équation (15); nous obtenons :

$$\sum(\dot b_{lm}C_{lm} + \dot b'_{lm}S_{lm}) + \boldsymbol{\Gamma}\frac{\mathbf{v}}{v}\sum\left(\frac{\partial a_{lm}}{\partial v}C_{lm} + \frac{\partial a'_{lm}}{\partial v}S_{lm}\right) + \boldsymbol{\Gamma}\sum\left(a_{lm}\frac{\partial C_{lm}}{\partial\mathbf{v}} + a'_{lm}\frac{\partial S_{lm}}{\partial\mathbf{v}}\right) + \sum\nu_l(b_{lm}C_{lm} + b'_{lm}S_{lm}) = \Omega\sum m(b'_{lm}C_{lm} - b_{lm}S_{lm}). \qquad (39)$$

Pour simplifier le calcul, nous supposerons l'instant t choisi de façon telle que les anisotropies transitoires de la fonction f_0 soient déjà devenues négligeables; à partir de cet instant que nous appellerons t_0 nous pouvons réécrire (39) sous la forme :

$$\sum(\dot b_{lm}C_{lm} + \dot b'_{lm}S_{lm}) + \Sigma\nu_l(b_{lm}C_{lm} + b'_{lm}S_{lm}) + \boldsymbol{\Gamma}\frac{\mathbf{v}}{v}\frac{\partial a_{00}}{\partial v}C_{00} + \boldsymbol{\Gamma}a_{00}\frac{\partial C_{00}}{\partial\mathbf{v}} = \Omega\sum m(b'_{lm}C_{lm} - b_{lm}S_{lm});$$

or on a

$$\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v}C_{00} = \Gamma\sin\psi\, v\sin\theta\sin\varphi + \Gamma\cos\psi\, v\cos\theta = \Gamma\sin\psi\, S_{11} + \Gamma\cos\psi\, C_{10}$$

et

$$\frac{\partial C_{00}}{\partial\mathbf{v}} = 0,$$

d'où

$$\sum(\dot b_{lm}C_{lm} + \dot b'_{lm}S_{lm}) + \sum\nu_l(b_{lm}C_{lm} + b'_{lm}S_{lm}) + \frac{1}{v}\frac{\partial a_{00}}{\partial v}(\Gamma\sin\psi\, S_{11} + \Gamma\cos\psi\, C_{10}) = \Omega\sum m(b'_{lm}C_{lm} - b_{lm}S_{lm}),$$

d'où le système

$$\dot b_{00} = 0 \qquad (C_{00}), \quad (40)$$

$$\dot b_{10} + \nu_1 b_{10} + \frac{1}{v}\frac{\partial a_{00}}{\partial v}\gamma\cos\psi\cos\omega t = 0 \qquad (C_{10}), \quad (41)$$

$$\dot b_{11} + \nu_1 b_{11} = \Omega b'_{11} \qquad (C_{11}), \quad (42)$$

$$\dot b'_{11} + \nu_1 b'_{11} + \frac{1}{v}\frac{\partial a_{00}}{\partial v}\gamma\sin\psi\cos\omega t = -\Omega b_{11} \qquad (S_{11}), \quad (43)$$

$$\dot b_{l_0} + \nu_l b_{l_0} = 0 \qquad (C_{l_0}), \quad (44)$$

$$\dot b_{lm} + \nu_l b_{lm} = m\Omega b'_{lm} \qquad (C_{lm}), \quad (45)$$

$$\dot b'_{lm} + \nu_l b'_{lm} = -m\Omega b_{lm} \qquad (S_{lm}), \quad (46)$$

Il est facile de voir que toutes les anisotropies initiales d'ordre l supérieur à 1 que l'on pourrait avoir dans f_1 s'amortissent comme celles de f_0;

les équations (44), (45) et (46) conduisent en effet à des formules exactement semblables aux formules (35) et (36); on trouve de même que b_{00} ne varie pas avec le temps; si à l'instant où l'on applique le champ le plasma est isotrope et b_{00} nul on peut voir que b_{00} reste identiquement nul (²).

D'autre part :

$$b_{10} = B_{10}\,\mathrm{e}^{-\nu_1 t} - \mathcal{R}\left\{\frac{1}{i\omega+\nu_1}\,\frac{1}{v}\,\frac{\partial a_{00}}{\partial v}\,\gamma\cos\psi\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right\}, \qquad (47)$$

$$b_{11} = B_{11}\,\mathrm{e}^{-\nu_1 t}\cos(\psi_{11}-\Omega t) - \mathcal{R}\left\{\frac{\Omega}{(i\omega+\nu_1)^2+\Omega^2}\,\frac{1}{v}\,\frac{\partial a_{00}}{\partial v}\,\gamma\sin\psi\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right\}, \qquad (48)$$

$$b'_{11} = B_{11}\,\mathrm{e}^{-\nu_1 t}\sin(\psi_{11}-\Omega t) - \mathcal{R}\left\{\frac{i\omega+\nu_1}{(i\omega+\nu_1)^2+\Omega^2}\,\frac{1}{v}\,\frac{\partial a_{00}}{\partial v}\,\gamma\sin\psi\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right\}, \qquad (49)$$

avec

$$\mathcal{R}\{z\} = \text{partie réelle de } z.$$

Nous voyons donc que pour les anisotropies d'ordre 1 il existe un régime transitoire pendant lequel les termes contenant le facteur $\mathrm{e}^{-\nu_1 t}$ s'amortissent; les amplitudes et les phases de ces termes sont déterminées par les conditions initiales. Il reste ensuite un régime permanent dans lequel les anisotropies du premier ordre sont des fonctions sinusoïdales de t; ces fonctions sont proportionnelles au champ électrique et ont la même fréquence que lui; elles vont nous permettre de définir le tenseur de conductivité du milieu.

b. Tenseur de conductivité. — Par définition, les composantes j_x, j_y, j_z du vecteur densité de courant **j** sont les valeurs des courants totaux traversant une surface de 1 cm² perpendiculaire à l'un des axes, on a donc :

$$j_x = e\iiint v_x f\,dv_x\,dv_y\,dv_z = e\iiint C_{11} f\,dv_x\,dv_y\,dv_z,$$

$$j_y = e\iiint v_y f\,dv_x\,dv_y\,dv_z = e\iiint S_{11} f\,dv_x\,dv_y\,dv_z,$$

$$j_z = e\iiint v_z f\,dv_x\,dv_y\,dv_z = e\iiint C_{10} f\,dv_x\,dv_y\,dv_z.$$

Pour faire les intégrations on passe en coordonnées sphériques dans l'espace des vitesses et on effectue d'abord les intégrations par rapport à θ et φ en laissant v constant; par suite de l'orthogonalité des fonctions sphériques, tous les termes rectangles disparaissent; autrement dit, si nous appelons $d\sigma$ l'élément de surface sur la sphère de centre O, de rayon v nous obtenons :

$$\left.\begin{aligned} j_x &= e\iint b_{11}(C_{11})^2\,dv\,d\sigma = \frac{4\pi e}{3}\int b_{11}\,v^4\,dv,\\ j_y &= e\iint b'_{11}(S_{11})^2\,dv\,d\sigma = \frac{4\pi e}{3}\int b'_{11}\,v^4\,dv,\\ j_z &= e\iint b_{10}(C_{10})^2\,dv\,d\sigma = \frac{4\pi e}{3}\int b_{10}\,v^4\,dv.\end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Pour trouver le tenseur de conductivité sous sa forme générale, il nous faut maintenant effectuer une rotation d'axes autour de Oz afin d'obtenir les composantes de **j** dans un système d'axes où aucune des composantes de **Γ** n'est nulle, soient

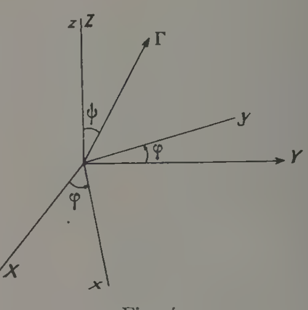


Fig. 4.

OXYZ ce nouveau système (*fig.* 4). On a :

$$j_X = j_x\cos\varphi - j_y\sin\varphi = \frac{4\pi e}{3}\int(b_{11}\cos\varphi - b'_{11}\sin\varphi)v^4\,dv,$$

$$j_Y = j_x\sin\varphi + j_y\cos\varphi = \frac{4\pi e}{3}\int(b_{11}\sin\varphi + b'_{11}\cos\varphi)v^4\,dv.$$

$$j_Z = j_z = \frac{4\pi e}{3}\int b_{10}\,v^4\,dv.$$

En combinant ces dernières relations avec les solutions permanentes tirées de (47) ,(48) et (49) et en tenant compte des relations :

$$\gamma\sin\psi\sin\varphi = -\gamma_X = -\frac{e}{m}E_X,$$

$$\gamma\sin\psi\cos\varphi = \gamma_Y = \frac{e}{m}E_Y,$$

nous obtenons finalement l'équation complexe :

$$\vec{\mathcal{J}} = \|\sigma\|\,\vec{\mathcal{E}}.$$

avec

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{i\omega t}, \qquad \mathbf{j} = \mathcal{R}(\vec{\mathcal{J}}),$$

$$\|\sigma\| = \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & 0\\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix} \qquad (51)$$

(²) Pour déterminer la valeur de b_{00} lorsque le plasma présente des anisotropies initiales, il faut en toute rigueur tenir compte exactement de ce qui se passe pendant la période transitoire en introduisant dans (39) les expressions complètes des coefficients a_{lm} données dans les formules (35) et (36) et en supposant qu'à l'instant où l'on applique le champ électrique la fonction b_{00} est nulle.

et

$$\sigma_0 = -\frac{4\pi e^2}{3m}\int_0^\infty \frac{1}{(i\omega + \nu_1)} v^3 \frac{da_{00}}{dv}\,dv, \quad (52)$$

$$\sigma_1 = -\frac{4\pi e^2}{3m}\int_0^\infty \frac{i\omega + \nu_1}{(i\omega + \nu_1)^2 + \Omega^2} v^3 \frac{da_{00}}{dv}\,dv, \quad (53)$$

$$\sigma_2 = -\frac{4\pi e^2}{3m}\int_0^\infty -\frac{\Omega}{(i\omega + \nu_1)^2 + \Omega^2} v^3 \frac{da_{00}}{dv}\,dv. \quad (54)$$

Les coefficients diagonaux sont les conductivités suivant les trois axes, le coefficient croisé représente l'effet Hall. On voit que :

— La conductivité σ_0 dans la direction du champ magnétique est indépendante de l'intensité du champ magnétique; autrement dit elle est égale à la conductivité du milieu en l'absence de champ magnétique;

— La conductivité σ_1 dans les deux directions perpendiculaires à H est différente de σ_0 : c'est le phénomène de magnétorésistance; pour les faibles valeurs de H c'est un effet du second ordre;

— Le coefficient σ_2 qui représente l'effet Hall est, pour les faibles valeurs de H, proportionnel au champ magnétique; c'est un effet du premier ordre. Pour aller plus loin dans la discussion des formules (52), (53) et (54), transformons-les en intégrant par parties :

$$\sigma_0 = -\frac{4\pi e^2}{3m}\left\{\left(\frac{a_{00}v^3}{i\omega + \nu_1}\right)_0^\infty - \int_0^\infty a_{00}\,d\left(\frac{v^3}{i\omega + \nu_1}\right)\right\}. \quad (55)$$

Il est facile de voir que le premier terme est nul : pour que le nombre des électrons soit fini, il faut en effet que $\int_0^\infty 4\pi v^2 a_{00}\,dv$ soit finie, c'est-à-dire que $v^2 a_{00}$ décroisse plus vite que 1 quand $\frac{1}{v}$ tend vers l'infini donc que $v^3 a_{00}$ tende vers zéro; (55) peut donc s'écrire

$$\sigma_0 = \int_0^\infty a_{00}\,d\left(\frac{4\pi v^3}{3}\,\frac{e^2}{m}\,\frac{1}{j\omega + \nu_1}\right) = \int_0^\infty a_{00}\,d\left[\frac{4\pi v^3}{3}\sigma'_0(v)\right]. \quad (56)$$

On obtient de même

$$\sigma_1 = \int_0^\infty a_{00}\,d\left[\frac{4\pi v^3}{3}\sigma'_1(v)\right], \quad (57)$$

$$\sigma_2 = \int_0^\infty a_{00}\,d\left[\frac{4\pi v^3}{3}\sigma'_2(v)\right]. \quad (58)$$

Les quantités $\sigma'_0(v)$, $\sigma'_1(v)$, $\sigma'_2(v)$ sont des « conductivités par électron » d'expression

$$\sigma'_0(v) = \frac{e^2}{m}\,\frac{1}{j\omega + \nu_1}, \quad (59)$$

$$\sigma'_1(v) = \frac{e^2}{m}\,\frac{\Omega}{(j\omega + \nu_1)^2 + \Omega^2}, \quad (60)$$

$$\sigma'_2(v) = \frac{e^2}{m}\,\frac{\Omega}{(j\omega + \nu_1)^2 + \Omega^2}. \quad (61)$$

Dans le cas où ν_1 est indépendant de v on peut faire sortir $\sigma'_0(v)$, $\sigma'_1(v)$, $\sigma'_2(v)$ des intégrales (56), (57) et (58); il reste à calculer

$$\int a_{00}\,4\pi v^2\,dv.$$

Nous démontrerons dans le prochain article que cette intégrale est égale à n, c'est-à-dire que les contributions à la densité des fonctions f_1, f_2, ... sont nulles. Quand ν_1 est constant, on trouve donc :

$$\sigma_0 = n\sigma'_0, \qquad \sigma_1 = n\sigma'_1, \qquad \sigma_2 = n\sigma'_2,$$

Manuscrit reçu le 17 mars 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] *Voir* Cowling T. G. — *Proc. Roy. Soc.*, 1944, **183**, 453, pour une étude plus complète de cette question.
[2] *Cf.* Rocard Y. — Thermodynamique, Masson, 1952, p. 344 et suiv.
[3] Lorentz H. A. — *Proc. Amst. Acad.*, 1905, **7**, 438, 585 et 684.
[4] Chapman S. et Cowling T. G. — The Mathematical Theory of non-uniform gases, chap. XVIII, Cambridge, 2e édition, 1952.
[5] Margenau H. — *Phys. Rev.*, 1946, **69**, 508.
[6] Jancel R. et Kahan T. — *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 533.
[7] Bayet M., Delcroix J. L. et Denisse J. F. — *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **237**, 1503.
[8] *Cf.*, par exemple : Rocard Y. — Thermodynamique, p. 285.
[9] *Cf.* par exemple : Smythe. — Static and dynamic electricity, Mac Graw Hill, 1952.
[10] Chapman S. et Cowling T. G. — *Loc. cit.*, p. 170-171.
[11] Maxwell. — Scientific papers, vol. II, chap. XXVIII.
[12] Bayet M. — *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 579; 1954, **15**, 258.

REMARQUES SUR L'ORGANISATION DU CORTÈGE ET DU NOYAU DES ATOMES

Par R. DAUDEL, S. ODIOT et H. BRION,

Institut du Radium et Institut de Mécanique ondulatoire appliquée
à la Chimie et à la Radioactivité.

Sommaire. — On n'avait pu jusqu'à présent introduire la notion de couche dans la théorie des systèmes de corpuscules sans négliger une partie importante de la corrélation entre les positions des corpuscules. On décrit un procédé qui permet d'associer aux couches d'un système certains domaines d'espace. Cette méthode est applicable à la fonction d'onde rigoureuse. Il devient donc possible de parler de couche sans négliger aucune partie de la dite corrélation. On obtient de plus des indications intéressantes sur la localisabilité des corpuscules dans les cortèges et les noyaux qui permettent de présenter à partir de modèles géométriques les résultats de la Mécanique ondulatoire sans en heurter les principes. Il est intéressant de noter que dans cette théorie plus rigoureuse il semble qu'on sera conduit à remplacer les nombres quantiques individuels entiers des théories approximatives par des valeurs moyennes seulement approximativement entières, mais nous n'avons pas terminé la discussion de cette question qui devrait peut-être ouvrir une voie vers des méthodes de calcul améliorées et assouplies des grandeurs observables à partir de la notion de couche.

Introduction. — Le succès rencontré, lors de l'introduction de la notion de couche dans les noyaux d'atomes suggère une analogie intéressante entre l'organisation du cortège et celle du noyau des atomes. En prévision d'un Colloque réservé aux interactions entre cortège et noyau, il nous a paru opportun de présenter ici un certain nombre d'observations sur la structure respective de ces deux systèmes.

Nous rappellerons d'abord les difficultés que l'on rencontre dans l'emploi classique de la notion de couche. Plus précisément nous soulignerons la nature de l'approximation dans laquelle on est conduit à se placer.

Puis nous montrerons qu'il nous semble exister une voie permettant l'introduction de la notion de couche dans un cadre plus rigoureux. Nous essaierons ainsi d'expliquer pourquoi l'emploi de la notion de couche conduit dans le domaine nucléaire à des résultats meilleurs que ceux auxquels on pourrait s'attendre parce qu'elle entraîne en fait moins d'approximations que l'on croit en faire. Nous signalerons enfin que l'introduction de la notion de couche selon la voie que nous proposons entraîne un assouplissement de la théorie qui devrait permettre d'obtenir quelques améliorations des calculs de Physique nucléaire et une compréhension plus claire des phénomènes qui naissent de l'interaction entre le noyau et son cortège.

La notion de couche dans le cortège électronique. — Il est bien connu que d'un point de vue expérimental la notion de couche se dégage principalement de l'étude des phénomènes d'ionisation des atomes.

Quand on essaie de retirer successivement les électrons d'un atome, on sait que l'énergie minimum d'ionisation croît au fur et à mesure que le nombre des électrons restants diminue et surtout que cette variation présente des irrégularités (*voir*, par exemple, la figure 1), ce qui donne l'impression que l'on

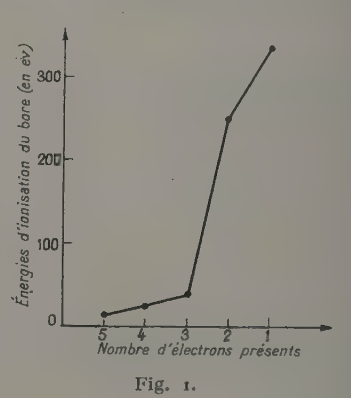


Fig. 1.

rencontre dans l'atome des couches d'électrons d'autant plus difficiles à extraire que l'on se rapproche du noyau.

On observe des irrégularités dans la variation de l'énergie de liaison moyenne et minimum des électrons gravitant autour d'un noyau Z donné avec le nombre des électrons du système (*fig.* 2).

On ne rencontre pas, au contraire, d'irrégularités quand on étudie la variation de l'énergie totale de liaison des électrons d'un atome neutre dans l'état fondamental avec le numéro atomique (*fig.* 3).

Il faut se souvenir que l'énergie d'un » niveau atomique » est au signe près défini expérimentalement comme la différence entre l'énergie de

liaison d'un atome et l'énergie d'un des ions correspondants à cet atome : ce n'est donc pas une grandeur observable au sens de la Mécanique ondulatoire, mais la *différence* entre deux grandeurs observables.

Il est encore important de noter que la mesure d'une énergie d'ionisation ne fournit pas l'énergie d'un électron particulier, mais la différence entre l'énergie de liaison de l'ion et celle de l'atome compte

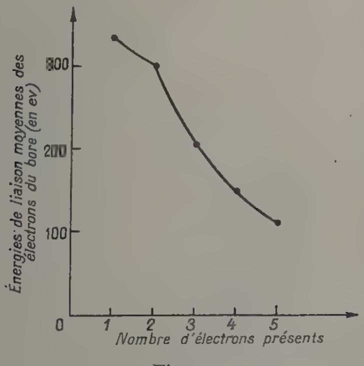


Fig. 2.

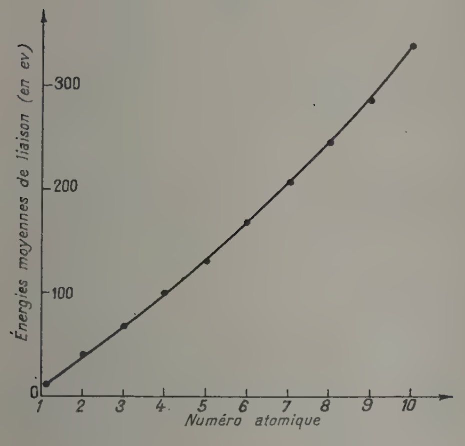


Fig. 3.

tenu de l'énergie de la réorganisation accompagnant le départ de l'électron.

Du point de vue théorique et depuis que l'on a abandonné l'idée de trajectoire simple pour les électrons d'un atome on ne sait pas, à partir d'un seul état de cet atome, définir rigoureusement des niveaux d'énergie pour les électrons. Une seule énergie propre a un sens rigoureux : celle du système total.

En raison de l'indiscernabilité des électrons ou, si l'on préfère, de l'antisymétrie de la fonction d'onde, tous les électrons d'un atome ont même énergie moyenne. En conséquence, il n'est pas non plus rigoureux d'associer aux électrons des nombres quantiques individuels. Seul l'état total du système est quantifié.

La moins mauvaise technique pour introduire théoriquement l'idée de couche consiste à remplacer la véritable fonction d'onde par une fonction *approchée* Φ ayant l'aspect d'un déterminant construit sur autant de fonctions $\varphi_P(i)$ qu'il y a d'électrons dans le système, i désignant l'ensemble des coordonnées d'espace et de spin associé à l'un des électrons.

On cherche alors les meilleurs φ_P et montre qu'elles sont solutions de l'équation du champ self consistent

$$\mathcal{H}\varphi_P = \varepsilon_P \varphi_P.$$

Cette équation ressemble à l'équation de Schrödinger pour un seul électron mais l'opérateur $\mathcal{H}$ contient les autres fonctions φ et l'analogie n'est donc que formelle. Elle suffit cependant pour que l'on puisse associer aux différentes fonctions φ_P des nombres quantiques individuels P et une énergie ε_P qui est voisine d'un des « niveaux atomiques » dont la définition expérimentale vient d'être rappelée.

En raison de la forme de la fonction :

$$\Phi = \begin{vmatrix} \varphi_A(1) & \varphi_B(1) & \varphi_C(1) & \dots \\ \varphi_A(2) & \varphi_B(2) & \dots\dots & \dots \\ \varphi_A(3) & \varphi_B(3) & \dots\dots & \dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \end{vmatrix}$$

le même électron, soit 1, apparaît comme étant sous la dépendance simultanée de tous les groupes de nombres quantiques approximatifs A, B, C, ... et c'est à cet état de fait que l'on associe la notion « d'échange » qui suggère bien facilement des idées fausses quand on cherche à associer des idées physiques à cette notion essentiellement formelle et mathématique.

C'est ainsi que dans un cadre approché se fait le raccord entre théorie et expérience. Mais en examinant la forme de la fonction d'onde approchée utilisée Φ, on voit que ce pont n'a été établi qu'en négligeant une partie importante de la corrélation existant entre les positions des électrons, c'est-à-dire du fait que la probabilité de rencontrer un électron en un point donné dépend de la position simultanée des autres.

C'est surtout la corrélation liée à la répulsion coulombienne qui est sacrifiée, la corrélation de Pauli étant assez bien représentée par le caractère antisymétrique du déterminant Φ.

On peut corriger cette approximation en introduisant l'interaction de configuration, mais la notion de couche disparaît alors en même temps, ce qui souligne bien son caractère approximatif dans les théories actuelles.

La notion de couche dans le noyau. — L'idée de couche se dégage d'un grand nombre de faits de la Physique nucléaire et il n'y a pas lieu de les rappeler ici. Nous aimerions cependant remarquer que c'est l'étude de la variation de l'énergie moyenne de liaison des nucléons avec leur nombre (*fig.* 4) [1] qui dans le domaine nucléaire se rapproche le plus des études signalées tout à l'heure dans le domaine du cortège. On voit, en effet, apparaître des discontinuités comme dans le cas du cortège et l'on observe comme dans ce cas une baisse d'ensemble de cette énergie quand s'élève le nombre des corpuscules au moins à partir de 62 nucléons.

Cependant dans le cas nucléaire certaines des discontinuités montrent que l'énergie moyenne de liaison des nucléons passe par un *maximum* lorsque « la couche correspondante est pleine ». Ce n'est pas le cas dans le domaine du cortège. D'autre part,

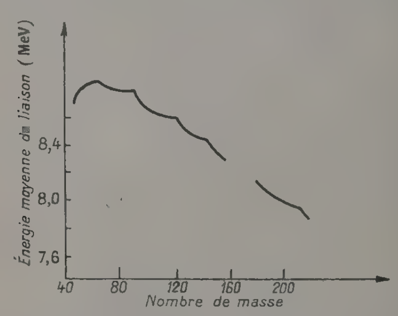


Fig. 4. — Pour chaque nombre de masse, on a fait figurer l'énergie moyenne correspondant au noyau le plus stable.

pour des noyaux de nombre de masse inférieur à 62, l'énergie considérée croît avec le nombre de corpuscules, ce qui n'arrive jamais dans le cas du cortège.

Ces différences entre les deux systèmes de corpuscules résultent du fait qu'entre deux nucléons l'interaction contient une partie attractive alors qu'entre électrons corticaux, elle est toujours répulsive et que dans le noyau il n'y a pas de centre de force sensiblement fixe comme dans le cas du cortège. La stabilité énergétique spéciale aux couches nucléaires conduit de plus à penser que l'interaction attractive entre les nucléons d'une même couche pleine est particulièrement forte.

Du point de vue théorique, les approximations que l'on introduit habituellement pour retrouver l'idée de couche sont ici de même nature que dans le domaine du cortège. On introduit la corrélation de Pauli, l'esprit du champ self et on néglige assez largement la corrélation liée au champ spécifiquement nucléaire. L'emploi des nombres quantiques individuels et la notion « d'échange » présentent encore le même caractère équivoque que dans le cas du cortège.

Cependant comme on admet habituellement que la corrélation liée au champ nucléaire est plus importante entre nucléons que la corrélation coulombienne entre électrons, on est en droit de s'attendre à ce que les modèles en couches conduisent à des résultats assez décevants, ce qui n'est pas tellement le cas.

Théorie de la localisabilité des électrons dans le cortège électronique [2]. — *a.* La notion de loge d'ordre 1. — Envisageons un système d'électrons, par exemple. Supposons qu'il soit dans un état à projection de spin bien définie et soit p le nombre des électrons de spin $+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$, par exemple. Découpons l'espace en p volumes V_i connexes ne se recouvrant pas et recouvrant tout l'espace et tels que l'on puisse évaluer dans chacun d'eux la probabilité P de rencontrer un électron et un seul de spin $+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$.

Nous dirons que l'on a découpé l'espace en loges d'ordre 1 et de caractère $+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ vis-à-vis de ce système. La même définition se transpose au spin $-\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$. La quantité

$$\Omega = \sum_i P_i$$

est supérieurement bornée par la valeur p. Posons

$$\eta = \frac{p - \Omega}{p},$$

η est positif et nous lui donnerons le nom de *défaut de localisation* du découpage par rapport au système dans l'état envisagé.

Le découpage sera considéré d'autant meilleur que η est petit.

L'ensemble des découpages en loges ainsi définies est très vaste, mais dans la pratique nous nous bornerons souvent à considérer des sous-ensembles en imposant aux découpages des propriétés supplémentaires suggérées, par exemple, par la symétrie de l'état étudié. Il deviendra alors généralement possible de trouver le (ou les) meilleur (s) découpage (s) d'un tel sous-ensemble, c'est-à-dire celui (ou ceux) correspondant au minimum de η quand il existe.

Soit Ψ $(x_1, \omega_1, x_2, \omega_2, \ldots; x_j, \omega_j, \ldots; x_n, \omega_n)$ la fonction d'onde représentant le système dans l'état considéré, on a

$$P_i = C_p^n P \int_{V_i} \mathrm{d}\tau_1 \int_{\text{espace-}V_i} \mathrm{d}\tau_2 \ldots \mathrm{d}\tau_p \int_{\text{espace}} \mathrm{d}\tau_{p+1} \ldots \mathrm{d}\tau_n$$
$$\times \int_{+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}} \mathrm{d}\omega_1 \ldots \mathrm{d}\omega_p \int_{\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}} \mathrm{d}\omega_{p+1} \ldots \mathrm{d}\omega_n \Psi^* \Psi.$$

Il est donc facile de calculer les P_i correspondant à un jeu donné de V_i, donc d'évaluer η.

b. Recherche des meilleurs découpages en loge dans le cas de l'hélium. — Discutons de ce point de vue deux états excités de l'hélium. Envisageons d'abord le premier état triplet.

Il est bien représenté par la fonction [3]

$$\Psi(r_1, r_2) = s\, e^{-Z's} \operatorname{sh} ct,$$

avec

$$s = \frac{r_1 + r_2}{a_0}, \qquad t = \frac{r_1 - r_2}{a_0},$$

$$Z' = 1{,}374, \qquad c = 0{,}825, \qquad a_0 = 0{,}53 \text{ Å}.$$

Adoptons le cas où les deux électrons ont le spin $+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$. La symétrie du problème suggère ici deux découpages distincts : soit un plan passant par le noyau, soit une sphère de rayon R concentrique au noyau. Dans les deux cas, on définit deux loges où

$$P_1 = P_2 = P.$$

Dans le cas du découpage plan on trouve

$$P = 0{,}5, \qquad \eta = 0{,}5.$$

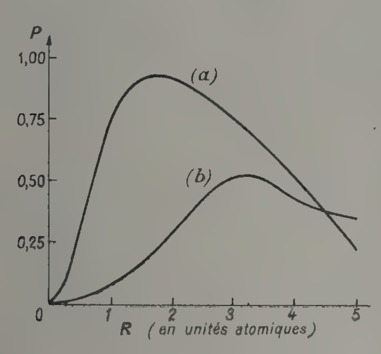


Fig. 5.

La courbe a de la figure 5 montre la variation de P avec R pour le découpage sphérique. Il existe pour P un maximum ($P = 0{,}93$ pour $R \# 1{,}7\, a_0$), donc pour η un minimum (0,07).

Ce minimum étant plus petit que dans le cas du découpage plan, il s'ensuit que de tous les découpages considérés, la sphère de rayon $R = 1{,}7\, a_0$ donne le meilleur.

Notons bien la signification physique de ce résultat : *il y a 93 chances sur 100 que sur son premier état triplet l'hélium comprenne un électron dans la dite sphère et l'autre à l'extérieur.*

Envisageons maintenant l'état triplet de projection de spin $+\frac{h}{2\pi}$ représenté par la configuration antisymétrisée $(2\, s)\,(2\, p_z)$. Adoptons des fonctions hydrogénoïdes avec $Z = 1{,}65$. On trouve pour le découpage plan (perpendiculaire à l'axe des z)

$$P = 0{,}78 \quad \text{et} \quad \eta = 0{,}22.$$

La courbe b de la figure 5 montre que dans le cas du découpage radial la grandeur P ne dépasse pas 0,52. Ici c'est donc le découpage plan qui est le meilleur.

Dans le cas du premier état triplet qui correspond classiquement à un électron K et à un électron L, nous avons été conduits à partager l'espace à l'aide d'une sphère et l'on peut associer l'espace intérieur à cette sphère à la couche K et l'espace extérieur, à la couche L. Dans le second état correspondant à deux électrons L nous avons été conduits à couper l'espace par un plan. Ce fait est en accord avec l'existence d'une seule couche qui se sépare en deux loges. Dans le premier cas, la corrélation radiale prédomine. Dans le second, c'est la corrélation angulaire. Il y a là un moyen de définir la notion de couche à partir de n'importe quelle fonction d'onde et notamment à partir de la fonction d'onde exacte sans faire, bien entendu, usage de nombres quantiques individuels.

c. Couronnes sphériques associées aux couches. — *En utilisant ce procédé, on est finalement conduit à faire correspondre à la notion de couche d'un atome un ensemble de loges qui pavent l'espace d'une couronne sphérique concentrique au noyau.* Les sphères successives qui définissent ces couronnes ont [4] sensiblement comme rayons ceux qui correspondent aux minima successifs de la densité radiale :

$$D(\mathbf{r}) = \sum_i \int \Psi^*(1, \ldots, i, \ldots)\, \Psi(1, \ldots, i, \ldots)\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\, d\tau$$

dans le cas des états à symétrie sphérique.

La charge électrique moyenne contenue dans la couronne ainsi associée à une couche qui aurait classiquement le nombre quantique n est voisin de $2\, n^2$ pour un état à « couches complètes ».

On a pu [1] sur quelques cas vérifier que l'énergie moyenne d'un électron dans la couronne ainsi associée à une couche est voisine de la valeur de ε_P que la théorie du champ self lui ferait correspondre.

On a donc l'impression qu'aux nombres quantiques individuels et entiers qu'une théorie approximative fait correspondre à la notion de couche il y a lieu de faire correspondre des valeurs moyennes approximativement entières dans une théorie rigoureuse.

C'est là où se trouve à notre avis la source d'un assouplissement qu'il serait souhaitable d'introduire dans la notion de couche. Nous ne prétendons pas avoir trouvé la voie la meilleure pour l'obtenir, nous croyons seulement avoir indiqué une direction possible de recherche.

L'amélioration essentielle que nous obtenons en essayant de relier la notion de couche à certains domaines d'espaces, à certaines valeurs moyennes c'est la possibilité d'utiliser une fonction d'onde

(1) Calculs inédits.

exacte (ce qui n'est pas le cas de la voie classique comme nous l'avons rappelé). Il n'est donc plus nécessaire de négliger une partie de la corrélation entre les corpuscules et nous voyons là un avantage appréciable notamment dans le cas du noyau.

Le tableau ci-dessous [5] donne les rayons r_m que l'on peut adopter pour caractériser les différentes couronnes sphériques associées aux couches dans l'état fondamental de quelques atomes ou ions, d'après les fonctions d'onde du champ self-consistent, ainsi que la charge moyenne que l'on rencontre dans chacune d'elles.

Éléments...	Be.	F^-.	Al^{+3}.	Ca^{+2}.	Rb^+.	Hg.
r_{K_m}	1,125 ± 0,005	0,375 ± 0,005	0,22 ± 0,005	0,13 ± 0,01	0,06 ± 0,0025	0,025 ± 0,0005
Charge	2,05 ± 0,015	2,24 ± 0,02	2,2 ± 0,04	2,2 ± 0,2	2,1 ± 0,1	2 ± 0,05
r_{L_m}	–	–	–	0,64 ± 0,01	0,265 ± 0,005	0,102 ± 0,001
Charge	–	–	–	8 ± 0,3	8 ± 0,25	9,5 ± 0,15
r_{M_m}	–	–	–	–	1,055 ± 0,01	0,278 ± 0,005
Charge	–	–	–	–	18,1 ± 0,06	18,7 ± 0,3
r_{N_m}	–	–	–	–	–	0,93 ± 0,05
Charge	–	–	–	–	–	33 ± 1

Les valeurs r_m sont données en unités atomiques, les charges en électrons.

Ce tableau permet de calculer sans peine le volume associé aux différentes couches et celui V des loges associées aux électrons dans ces couches. Le volume V donne une idée de « l'espace vital moyen » réservé à chaque électron quand il passe dans le domaine associé à une couche.

Si l'on évalue le potentiel électrique moyen $\overline{P}$

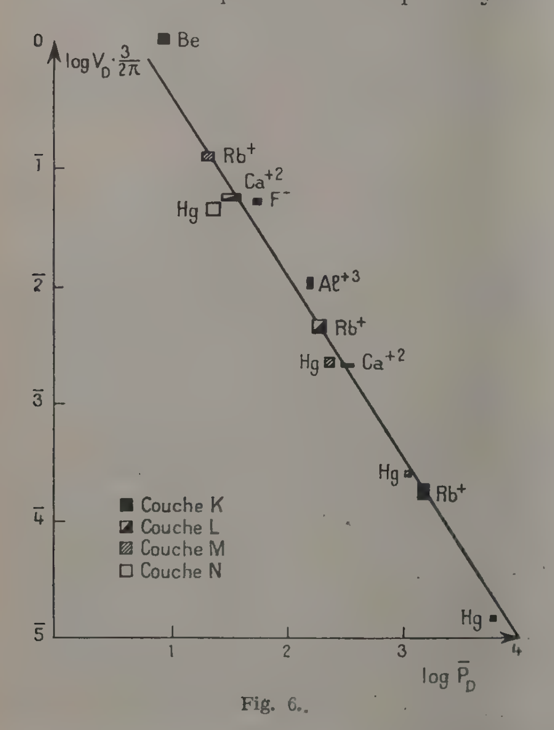


Fig. 6.

ressenti par l'électron considéré dans ledit domaine, on s'aperçoit que l'on a sensiblement [6]

$$\overline{P}^{\frac{3}{2}} V = \text{const.}$$

(comme le souligne la figure 6).

Il existe ainsi une loi évoquant un peu la loi de Mariotte entre le volume moyen occupé par un électron et le potentiel électrique qui agit sur lui.

La notion de loge dans les noyaux. — Nous avons rappelé que la plus grosse objection que l'on peut présenter contre les modèles nucléaires « en couches » est le fait qu'ils semblent conduire à une négligence d'une grande partie des corrélations d'origine spécifiquement nucléaire.

Dans le cadre du langage des loges, il devient possible de parler de couche tout en conservant la totalité de la corrélation puisque l'on pourrait en principe définir des loges à partir de la fonction d'onde exacte caractérisant un noyau.

En fait comme on est encore loin d'avoir une bonne expression de cette fonction d'onde et comme une partie de nos efforts a été dirigée vers l'application prometteuse de l'idée de loges à l'étude de la structure des molécules, nous n'avons pas à cette date effectué de calculs permettant d'avoir une idée un peu précise de l'organisation des loges dans les noyaux. Nous nous bornerons donc à quelques considérations générales.

Remarquons d'abord que l'on admet le plus souvent que le potentiel d'interaction nucléaire est presque constant à l'intérieur du noyau puis diminue rapidement en valeur absolue quand on s'approche de la périphérie. Si l'on admet encore ici une loi en :

$$\overline{P}^{\frac{3}{2}} V = \text{const.},$$

la constance de $\overline{P}$ entraîne l'existence de loges ayant un volume sensiblement constant, sauf près de la périphérie où ce volume doit devenir plus grand.

Cette quasi constance du volume moyen occupé ainsi par un nucléon est en bon accord avec le fait que le volume du noyau est sensiblement proportionnel au nombre des nucléons qu'il contient.

Remarquons qu'on devra ici considérer quatre types de loges :

1° Les loges pour protons de spin $+\frac{1}{2}$;

2° Les loges pour protons de spin $-\frac{1}{2}$;

3° Les loges pour neutrons de spin $+\frac{1}{2}$;

4° Les loges pour neutrons de spin $-\frac{1}{2}$;

Les loges de types différents peuvent se superposer et l'on peut donc concevoir des régions de l'espace où il y a simultanément place pour deux protons et deux neutrons de spin contraire suggérant l'idée de particules α «préformées». Mais notons bien que cette notion se retrouve ici sous une forme très assouplie par rapport à celle que l'on rencontre dans le cadre de la théorie du modèle à particules α préformées.

Ici l'organisation en particules α n'apparaît que d'une façon éphémère d'autant plus que le défaut de localisation des meilleurs découpages en loges nucléaires est certainement bien plus grand que dans le cas du cortège électronique ([2]), c'est-à-dire que les loges ne correspondent ici qu'à une localisation bien moins forte que dans le cas du cortège.

Finalement, notons encore que la répulsion coulombienne doit rapidement tendre à augmenter le volume des loges pour protons par rapport à celui des loges pour neutrons. On comprend donc d'une autre façon pourquoi dans un même espace nucléaire il y a généralement place pour plus de neutrons que de protons.

Conclusion. — On sent finalement que la notion de loge apporte à la fois de la souplesse dans la notion de couche et la possibilité de « visualiser » sans manque de rigueur les résultats de la Mécanique ondulatoire. *Cette possibilité de faire reposer à nouveau l'esprit sur des modèles géométriques ne heurtant pas les conceptions de la Mécanique ondulatoire* nous semble l'un des résultats les plus séduisants de cette théorie.

([2]) On se rend facilement compte de cet état de chose en réfléchissant sur les fonctions de l'oscillateur harmonique qui sont souvent utilisées dans la théorie des modèles en couches.

Manuscrit reçu le 10 avril 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] DUCKWORTH H. E. — *Nature*, 1952, **170**, 158.
[2] A ce sujet, *voir* :
DAUDEL R. — *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **237**, 601.
DAUDEL R., ODIOT S. et BRION H. — *J. Chim. Phys.*, 1954, **51**, 74.
[3] HYLLERAAS E. A. — *Z. Physik*, 1929, **54**, 347.
[4] DAUDEL R. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **235**, 886.
[5] ODIOT S. — *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **237**, 1399.
[6] ODIOT S. et DAUDEL R. 1954, **238**, 1384.

COVARIANCE RELATIVISTE A LA BASE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Par O. COSTA DE BEAUREGARD,
Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire. — Formalisme covariant d'intégrales de Fourier, tridimensionnelles curvilignes pour la particule libre à spin, quadridimensionnelles pour la particule liée à spin. Définitions covariantes de l'orthogonalité, de la norme, etc. Relation avec la théorie de Schwinger-Feynman. Réponse à une objection ancienne de L. de Broglie [1].

I. — Introduction.

Nous réunissons ici, et nous systématisons, un certain nombre de Notes ou de Mémoires antérieurs. Il ressort des formules même que nous produisons que la symétrie et la covariance relativistes peuvent être introduites en Théorie des Quanta dès le niveau élémentaire de la théorie de la particule à spin non explicitement superquantifiée. Dans une autre partie de notre étude, publiée ailleurs [9], nous montrons que la prise en considération des statistiques quantiques est indispensable à la levée de certains paradoxes, en sorte que, finalement, la superquantification est aussi indispensable que le spin à la réconciliation complète de la Relativité et des Quanta. Quoi qu'il en soit, nos formules très simples, ici produites, viennent corroborer les beaux travaux de Tomonaga [18], Schwinger [16], [17], Dyson [11], Feynman [12], auxquels elles constituent en somme une introduction élémentaire.

Mais cette étude technique en appelle une autre, d'ordre épistémologique, dont le titre tout indiqué sera *Complémentarité et Relativité* [10]. Nous y discutons, notamment, en termes d'Univers de Minkowski, la célèbre expérience de pensée d'Einstein, Podolsky, Rosen, et quelques autres.

Finalement, nous croyons pouvoir affirmer que la réconciliation des formalismes de la Relativité restreinte, et de la Théorie des Quanta fondée sur la Complémentarité, est un fait absolument accompli.

II. — Particule libre à spin.

II.1. Transformations de Fourier covariantes [7]. — Soient h et c les constantes universelles bien connues, k_λ la 4-fréquence d'une onde plane et p_λ l'impulsion-énergie du corpuscule associé, k_0 et cm_0 les longueurs de ces 4-vecteurs :

$$\left.\begin{array}{l} h k_\lambda = 2\pi p_\lambda, \qquad h k_0 = 2\pi c m_0, \\ (\lambda, \mu, \nu, \rho = 1, 2, 3, 4). \end{array}\right\} \qquad (1)$$

L'équation de la particule de spin multiple de $\frac{h}{4\pi}$ est de la forme

$$\{ a_\lambda \partial^\lambda + k_0 \} \psi(x) = 0, \qquad (2)$$

et, quelle que soit l'algèbre des matrices a_λ, l'équation de Gordon

$$\{ \partial_\lambda^\lambda - k_0^2 \} \psi(x) = 0 \qquad (3)$$

est conséquence de la théorie.

Avec Marcel Riesz [15], prenons le développement de Fourier du ψ sous la forme (1)

$$4\pi^2 \psi(x) = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} e^{ik^\lambda x_\lambda} \zeta(k)\, d^4 x; \qquad (4)$$

appliquant l'opérateur de Gordon, on voit que

$$\zeta(k) = 0 \qquad \text{si} \quad k_\lambda k^\lambda \neq -k_0^2,$$
$$k_\lambda k^\lambda = -k_0^2 \qquad \text{si} \quad \zeta(k) \neq 0.$$

Ainsi, $\mathcal{H}$ désignant l'hyperboloïde à deux nappes du 4-espace k

$$k_\lambda k^\lambda + k_0^2 = 0 \qquad (5)$$

et

$$i\,\delta v_\lambda = [d k_\mu\, dk_\nu\, dk_\rho], \qquad k_\lambda\, \delta v = -k_0\, \delta v_\lambda \qquad (6)$$

définissant le 4-vecteur élément de volume sur $\mathcal{H}$ (évidemment colinéaire à k_λ) ainsi que son module (positif par définition), le développement de Fourier le plus général du ψ peut être donné sous les deux formes équivalentes

$$(2\pi)^{\frac{3}{2}} \psi(x) = -i \iiint_{\mathcal{H}} a^\lambda\, \delta v_\lambda\, e^{ik^\nu x_\nu} \zeta(k)$$
$$= \iiint_{\mathcal{H}} \delta v\, e^{ik^\nu x_\nu} \zeta(k); \qquad (7)$$

on passe d'une forme à l'autre au moyen de (6_2) et (2). Naturellement, la forme en k de (2) est

$$\{ a_\lambda k^\lambda - ik_0 \} \zeta(k) = 0. \qquad (8)$$

Je dis que la formule de Fourier covariante réciproque de (7) est

$$(2\pi)^{\frac{3}{2}} \zeta(k) = \frac{i}{2k_0} \iiint_{\mathcal{E}} \delta u_\mu\, \varepsilon(k)\, e^{-ik^\lambda x_\lambda} (i k^\mu + \partial^\mu) \psi(x), \qquad (9)$$

où $\mathcal{E}$ désigne une hypersurface quelconque du genre espace de l'espace-temps (2), δu_μ son 4-vecteur

(1) Le début de cette étude s'inspire de Marcel Riesz [15], que nous généralisons sur les points qui nous intéressent.

(2) Nous préférons la notation $\mathcal{E}$ au σ de Tomonaga-

élément de volume ($i\delta u_4 > 0$), $\varepsilon(k)$ un commutateur de signe bien connu :

$$i\delta u_\lambda = [dx_\mu dx_\nu dx_\rho], \qquad \varepsilon(k) = \frac{\frac{k_4}{i}}{\left|\frac{k_4}{i}\right|}. \qquad (10)$$

Prenant l'intégrale (9) sur deux $\mathcal{E}$ différentes, transformant la différence en intégrale quadruple, et tenant compte de l'équation de Gordon sous ses formes (3) et (5), il vient bien *zéro* [3] en vertu de

$$\partial_\mu\{e^{ik^\lambda x_\lambda}(ik^\mu + \partial^\mu)\psi(x)\}$$
$$= e^{-ik^\lambda x_\lambda}\{k_\mu k^\mu - ik_\mu\partial^\mu + ik_\mu\partial^\mu + \partial^\mu_\mu\}\psi(x).$$

Prenant alors pour $\mathcal{E}$ l'hyperplan $x_4 = 0$, et écrivant séparément le résultat pour les énergies positives et négatives, avec

$$\vec{k} = k_\alpha, \qquad \vec{x} = x_\alpha \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3), \qquad (11)$$

il vient

$$(2\pi)^{\frac{3}{2}}\zeta_\pm(\vec{k}) = \pm\frac{1}{2k_0}\iiint d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{k}\vec{x}}(ik_4 + \partial_4)\psi(\vec{x}, 0). \qquad (12)$$

Par ailleurs, faisant dans (6_2) $\lambda = 4$, il apparaît l'invariant relativiste bien connu de la théorie des champs

$$\frac{d^3\vec{k}}{ik_4} = \pm\frac{\delta v}{k_0}, \quad + \text{ sur } \mathcal{H}_+, \quad - \text{ sur } \mathcal{H}_-, \qquad (13)$$

de sorte que l'on déduit de (7_2) les expressions suivantes pour les contributions à $\psi(\vec{x}, 0)$ des énergies positives et négatives

$$(2\pi)^{\frac{3}{2}}\psi_\pm(\vec{x}, 0) = \pm k_0\iiint d^3\vec{k}\, e^{i\vec{k}.\vec{x}}\frac{\zeta_\pm(\vec{k})}{ik_4}, \qquad (14)$$

ou, équivalemment,

$$(2\pi)^{\frac{3}{2}}\partial_4\psi_\pm(\vec{x}, 0) = \pm k_0\iiint d^3\vec{k}\, e^{i\vec{k}.\vec{x}}\zeta_\pm(\vec{k}). \qquad (15)$$

D'après la théorie élémentaire des intégrales de Fourier, les réciproques des (14) et (15) sont

$$(2\pi)^{\frac{3}{2}}\zeta_\pm(\vec{k}) = \pm\frac{1}{k_0}\iiint d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{k}.\vec{x}} ik_4\psi_\pm(\vec{x}, 0)$$
$$= \pm\frac{1}{k_0}\iiint d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{k}.\vec{x}}\partial_4\psi_\pm(\vec{x}, 0), \qquad (16)$$

et il s'ensuit bien (12) ci-dessus, si l'on remarque que toute composante plane à énergie positive du ψ est orthogonale (au sens ordinaire) à toute composante à énergie négative; il y aurait doute pour deux composantes de même $\vec{k}$, mais, comme cette égalité n'est que *relative*, on lève le doute en changeant de repère galiléen.

Schwinger, notamment par ce qu'elle laisse disponible l'habituelle notation de la densité de spin.

[3] Ce calcul, et la formule (9), rectifient ceux que nous avions initialement donnés [4], [6].

Dans (9) figure la dérivée normale sur $\mathcal{E}$ du $\psi(x)$: celà tient à ce que nous n'avons invoqué que l'équation du second ordre de Gordon. En faisant jouer l'équation du premier ordre de la particule à spin, on fera disparaître la dérivée normale, mais, en contre-partie, l'algèbre particulière des a_λ fera son apparition. Par exemple, en théorie de Dirac

$$\left.\begin{aligned} &\partial_\mu\psi = \{[\gamma_{\nu\mu}]\partial^\nu - k_0\gamma_\mu\}\psi, \\ &\gamma_{\mu\nu} = -\gamma_{\nu\mu} = \begin{cases} \gamma_\mu\gamma_\nu & \text{si } \mu \neq \nu, \\ 0 & \text{si } \mu = \nu \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

et, en théorie de Kemmer [13, éq. (6) et (62)].

$$\partial_\mu\psi = \{[\beta_\nu\beta_\mu - \beta_\mu\beta_\nu]\partial^\nu - k_0\beta_\mu\}\psi. \qquad (18)$$

Portant dans (9) ces expressions de ∂_μ, intégrant par parties, et remarquant qu'en vertu de l'antisymétrie de la matrice [ ] ci-dessus, la partie « tout-intégrée » est effectivement la transformée d'une intégrale double prise sur le contour à l'infini de $\mathcal{E}$, intégrale qui est nulle sous les hypothèses habituelles concernant le comportement du ψ à l'infini spatial, il reste une intégrale où le déplacement de l'opérateur ∂^ν sur l'exponentielle donne de nouveaux termes en k^ν; réductions faites, il vient, en théorie de Dirac,

$$(2\pi)^{\frac{3}{2}}\zeta_{(\frac{1}{2})}(\vec{k})$$
$$= \frac{i}{2k_0}\iiint_{\mathcal{E}}\delta u_\nu\varepsilon(k)\, e^{-ik^\lambda x_\lambda}\{(i\gamma_\mu k^\mu - k_0)\gamma^\nu\}\psi(x) \qquad (19)$$

et, en théorie de Kemmer,

$$(2\pi)^{\frac{3}{2}}\zeta_{(1)}(k) = \frac{i}{2k_0}\iiint_{\mathcal{E}}\delta u_\nu\varepsilon(k)\, e^{-ik^\lambda x_\lambda}$$
$$\times\{ik^\nu + ik_\mu[\beta^\mu\beta^\nu - \beta^\nu\beta^\mu] - k_0\beta^\nu\}\psi(x). \qquad (20)$$

Le lecteur pourra vérifier à nouveau qu'en prenant les intégrales (19) ou (20) sur deux $\mathcal{E}$ différentes, transformant la différence en intégrale quadruple, et faisant jouer cette fois l'équation du premier ordre de la particule à spin, il vient bien *zéro* : *le* $\zeta(k)$ *défini par* (9), (19) *ou* (20) *est indépendant de* $\mathcal{E}$.

Dans (19) et (20), la dérivée normale du ψ a disparu. A la place, il y a une combinaison linéaire des composantes du ψ.

II.2. **Égalité de Parseval covariante.** — Introduisant les *adjoints covariants* $\bar{\psi}$ et $\bar{\zeta}$ du ψ et du ζ, ainsi que la matrice β que sait définir toute théorie de particule à spin, telle que

$$\bar{\psi} = \psi^+\beta, \qquad \bar{\zeta} = \zeta^+\beta, \qquad (21)$$

les adjointes relativistes de (2) et de (8) sont

$$\bar{\psi}(x)\{a_\lambda\overleftarrow{\partial^\lambda} - k_0\} = 0, \qquad \bar{\zeta}(k)\{a_\lambda k^\lambda - ik_0\} = 0; \qquad (22)$$

(8) et (22_2) ont les conséquences

$$k_\lambda\bar{\zeta}_1\zeta_2 = ik_0\bar{\zeta}_1 a_\lambda\zeta_2, \qquad k^\lambda\bar{\zeta}_1 a_\lambda\zeta_2 = ik_0\bar{\zeta}_1\zeta_2. \qquad (23)$$

qui montrent notamment que les 4-vecteurs de l'espace des k, k_λ et $\bar{\zeta}_1 a_\lambda \zeta_2$, sont colinéaires.

Je dis que la formule de Parseval covariante est [4]

$$i \iiint_{\mathcal{E}} \bar{\psi}_1 a^\lambda \psi_2 \delta u_\lambda = i \iiint_{\mathcal{H}} \varepsilon(k) \bar{\zeta}_1 a^\lambda \zeta_2 \delta v_\lambda$$
$$= - \iiint_{\mathcal{H}} \varepsilon(k) \bar{\zeta}_1 \zeta_2 \delta v; \qquad (24)$$

on passe de la première à la seconde forme au moyen de (23_2) et (6_2). Compte tenu de l'équation de continuité

$$\partial_\lambda \bar{\psi}_1 a^\lambda \psi_2 = 0, \qquad (25)$$

l'on voit que le premier membre est indépendant de $\mathcal{E}$, ce qui nous permet de le calculer en particulier sur l'hyperplan $x_4 = 0$. Par ailleurs, exprimant le troisième membre en tenant compte de (13), puis de (23_1) pour $\lambda = 4$, il vient (avec le même signe pour les deux nappes)

$$\iiint_{x_4=0} \bar{\psi}_1 a^4 \psi_2 \, d^3\vec{x} = - k_0 \iiint_{k_4=0} \frac{\bar{\zeta}_1 \zeta_2}{i k_4} d^3\vec{k}$$
$$= - k_0^2 \iiint_{k_4=0} \frac{\bar{\zeta}_1 a^4 \zeta_2}{k_4^2} d^3\vec{k}; \qquad (26)$$

séparant, en vertu d'une précédente remarque, les parties à énergies positives et négatives du ψ, l'on peut écrire, le signe étant partout + ou —,

$$\iiint_{x_4=0} \bar{\psi}_\pm^1 a^4 \psi_\pm^2 \, d^3\vec{x} = - k_0^2 \iiint_{k_4=0} \frac{\bar{\zeta}_\pm^1 a^4 \zeta_\pm^2}{k_4^2} d^3\vec{k}; \qquad (27)$$

ceci est bien l'égalité de Parseval ordinaire associée aux transformations de Fourier ordinaires (14) et (16). c. q. f. d.

II.3. **Définition covariante de l'orthogonalité et de la normalisation** [2]. — Deux ψ ou deux ζ seront dits *orthogonaux au nouveau sens covariant* si l'intégrale (24) vaut *zéro*. Prenant

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi, \qquad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta.$$

(24) fournit la norme de chaque fonction d'un système orthonormal (normalisation en nombre de particules). Il suit de ce qui précède que l'ensemble des composantes planes à énergies (ou fréquences) positives et négatives forme un système orthogonal complet, au nouveau sens covariant, pour développer le ψ.

En théorie de Dirac, $\psi \gamma^4 \psi = \psi^+ \psi$; il y a donc identité entre la nouvelle définition et la définition classique. Remarquons aussi qu'en théorie de Dirac le premier membre de (24) est défini positif, en sorte qu'au troisième membre $\bar{\zeta}\zeta$ est positif sur la nappe $\mathcal{H}_+$, négatif sur la nappe $\mathcal{H}_-$; nous retrouvons ainsi un résultat connu.

[4] Cette formule rectifie, par le $\varepsilon(k)$, celle que nous avions initialement donnée [4], [6].

En théorie des particules à spin supérieur à $\frac{h}{4\pi}$, l'intégrale (26_1) s'écrit

$$\iiint \psi_1^+ \beta a_4 \psi_2 \, d^3\vec{x};$$

ceci est bien connu, en ce qui concerne la normalisation tout au moins (normalisation en nombre de particules). Le premier membre de (24) n'est plus alors défini positif, en sorte qu'on ne peut rien dire touchant le signe de $\bar{\zeta}\zeta$ sur chaque nappe de $\mathcal{H}$. Par contre, il reste vrai que, *pour la normalisation en nombre de particules*, l'on ne change rien en permutant simultanément le signe du 4-vecteur k_λ d'une composante spectrale, et celui de son nombre d'occupation n_k.

Vérifions directement, sur la première intégrale (24), *qu'en permutant les indices* 1 *et* 2, *on passe au nombre complexe conjugué.* Les conjuguées des quatre composantes de δu_λ sont $\pm \delta u_\lambda$, + si $\lambda = 1, 2, 3$, — si $\lambda = 4$. En supposant, ce qui est toujours possible, les a^λ et β hermitiennes, les conjuguées des quatre composantes de $\psi_1^+ \beta a^\lambda \psi_2$ sont

$$\psi_2^+ a^\lambda \beta \psi_1 = \mp \psi_2^+ \beta a^\lambda \psi_1, \quad - \text{ si } \lambda = 1, 2, 3, \quad + \text{ si } \lambda = 4$$

(en théorie de Kemmer, *voir* [13], éq. (3')). Finalement,

$$(i \bar{\psi}_1 a^\lambda \psi_2 \delta u_\lambda)^* = i \bar{\psi}_2 a^\lambda \psi_1 \delta u_\lambda. \qquad (28)$$

c. q. f. d.

Ici, comme en d'autres questions similaires, *c'est donc essentiellement le jeu de la « matrice-tampon »* β *qui concilie les exigences des formalismes relativiste et quantique, et notamment les rôles des deux symboles* i *propres à chaque théorie.* Signalons que ce jeu de formules (ou d'autres très similaires) sont impliqués à plusieurs reprises dans Schwinger [16, éq. (1.51) et (2.27)].

II.4. **Fonction caractéristique de l'impulsion-énergie.** — Il est clair que, dans (24), l'intégrand des seconds membres est la *fonction de distribution de l'impulsion-énergie.* Posons alors

$$\zeta_1 = \zeta; \qquad \zeta_2 = e^{i k^\lambda y_\lambda} \zeta; \qquad (29)$$

compte tenu de (7), (24) devient

$$i \iiint_{\mathcal{E}} \bar{\psi}(x) a^\lambda \psi(x+y) \delta u_\lambda = i \iiint_{\mathcal{H}} \varepsilon(k) e^{i k^\lambda x_\lambda} \bar{\zeta} \zeta \delta v, \quad (30)$$

et ceci montre, en vertu d'une définition bien connue du Calcul des Probabilités, que le premier membre de (30) est la *fonction caractéristique* de l'impulsion-énergie de la particule libre. Nous avions antérieurement déduit ce résultat autrement [5].

II.5. **Résolution du problème de Cauchy.** — Portant (9), (19) ou (20) dans (7), on résout le problème de Cauchy sous la forme

$$\psi(x) = \iiint_{\mathcal{E}'} S^\lambda(x - x') \psi(x') \delta u_\lambda(x'), \qquad (31)$$

avec respectivement, pour la particule de spin quelconque, et $D(x)$ désignant la fonction de propagation de Stueckelberg (réelle, impaire, et nulle dans l'*ailleurs*)

$$S^{\lambda}(x) = \partial^{\lambda} D(x) + D(x) \partial'^{\lambda},$$
$$D(x) = \frac{i}{2 k_0 (2\pi)^3} \iiint_{\mathcal{H}} \varepsilon(k)\, e^{i k^{\lambda} x_{\lambda}} \delta v, \qquad (32)$$

pour la particule de Dirac

$$S^{\lambda}_{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = \{ (\gamma_{\mu} \partial^{\mu} - k_0) \gamma^{\lambda} \} D(x), \qquad (33)$$

et pour la particule de Kemmer

$$S^{\lambda}_{(1)}(x) = \{ \partial^{\lambda} + \partial_{\mu} [\beta^{\mu} \beta^{\lambda} - \beta^{\lambda} \beta^{\mu}] - k_0 \beta^{\lambda} \} D(x). \qquad (34)$$

Avec la forme générale (32), impliquant seulement l'équation du second ordre de Gordon, la dérivée normale sur $\mathcal{E}'$ du ψ figure. Avec les formes spécialisées (33) ou (34), l'on a à la place une combinaison linéaire des composantes du ψ. (32) a été donnée par Schwinger pour le photon, et (33) pour l'électron [16, éq. (2.22), (2.23), (2.24)], [17, éq. (A.29)].

II.6. **Localisations patio-temporelle des particules.** — Le problème de la distribution des particules sur les états d'impulsion-énergie a été résolu aux paragraphes II.1 et II.2. L'introduction des fonctions de propagation $D(x-x')$ ou $S^{\lambda}(x-x')$ va nous permettre de traiter le problème *complémentaire* de leur localisation spatio-temporelle.

Imaginons que l'instant-point x de la formule (31) décrive une hypersurface arbitraire $\mathcal{E}$ du genre espace, ne coupant pas $\mathcal{E}'$, et que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ soient pavées d'une infinité de petites cellules jointives; si l'on aime un langage imagé, disons que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ représentent, dans l'Univers de Minkowski, deux écrans tridimensionnels, chacun percé d'une petite ouverture (l'une des précédentes cellules) que franchit ou ne franchit pas la particule. En termes de théorie de la mesure quantique de Von Neumann, la particule répond ainsi « oui » ou « non » à la mesure $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{E}'$ assimilée à une question; idéalement, l'on dispose de deux jeux complets $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}$ d'écrans *complémentaires* (au sens de l'optique), ce qui permet de poser de toutes les manières possibles la double question « $\mathcal{E}'$ puis $\mathcal{E}$ », ou « $\mathcal{E}$ puis $\mathcal{E}'$ ».

Par (31), $\psi(x)$, considérée comme une variété attachée à $\mathcal{E}$, est développée sur le système des fonctions $S^{\lambda}(x-x')$, où x est considérée comme la variable et x', attachée à $\mathcal{E}' \neq \mathcal{E}$, comme l'indice de numération. L'on voit sans peine que deux $S^{\lambda}(x)$ différentes, c'est-à-dire attachées à deux x' différents, sont orthogonales sur $\mathcal{E}$ au sens covariant du paragraphe II.3; il suffit pour celà d'exprimer l'intégrale curviligne en termes de sa projection à temps constant, et de noter la présence d'un facteur exponentiel oscillant à exposant non nul. Les coefficients du développement du $\psi(x)$ lié à $\mathcal{E}$ sont les $\psi(x')$ liés à $\mathcal{E}'$. Reste à voir si nous pouvons calculer ces coefficients par la formule habituelle dûment généralisée.

Commençons par le cas de l'électron de Dirac, où le formalisme est d'un maniement particulièrement aisé. Modifiant légèrement les notations, nous écrirons, avec Schwinger [16]

$$S_{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = (\gamma_{\mu} \partial^{\mu} - k_0) D(x) \qquad (35)$$

et

$$\psi(x) = \iiint_{\mathcal{E}'} S(x-x') \gamma^{\lambda} \psi(x') \delta u_{\lambda}(x'), \qquad (36)$$

ce qui est une expression du type canonique (24). Réciproquement, nous aurons la même formule avec permutation de x et x', et substitution de $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E}$, ou encore, en prenant l'expression conjuguée et multipliant à droite par γ^4,

$$\bar{\psi}(x') = \iiint_{\mathcal{E}} \delta u_{\lambda}(x) \bar{\psi}(x) \gamma^{\lambda} S(x-x'); \qquad (37)$$

ceci est exactement la formule classique pour le calcul des coefficients $\psi(x')$ du développement du $\psi(x)$ sur les fonctions $S(x-x')$, compte tenu de la généralisation des définitions impliquée dans la formule (24). Nous disposons donc d'un formalisme covariant relativiste, transposant textuellement le formalisme quantique habituel, qui nous permet de traiter le problème des mesures de localisation successives d'une particule, assimilées au franchissement d'un écran tridimensionnel du genre espace barrant tout l'espace-temps, et percé d'une petite ouverture arbitrairement découpée. Dans le franchissement ou le non-franchissement des écrans successifs (réponse *oui* ou *non* à la question posée), l'on assiste à la *réduction du paquet de probabilités*, bien connue. La différence essentielle avec le formalisme « à temps constant » de la classique Théorie des Quanta, est que les fonctions de propagation de Stueckelberg remplacent les $\delta(\vec{x})$: si une particule a été localisée dans une petite ouverture au franchissement d'un écran $\mathcal{E}$ (localisation tridimensionnelle, ou localisation de franchissement) elle est, dans l'Univers, attachée à la fonction de propagation $D(x)$ ayant son sommet au point moyen de l'ouverture, c'est-à-dire que toutes ses manifestations passées et futures sont contenues à l'intérieur du cône isotrope de sommet x (localisation 4-dimensionnelle).

Avec le formalisme de Kemmer, les formules seraient un peu plus compliquées. En particulier, les β^{λ} n'ayant pas d'inverses, on ne verrait pas un β^{λ} prendre la place du γ^{λ} dans les formules analogues à (36) et (37); par voie de conséquence, ceci impliquerait une légère extension aux définitions posées au paragraphe II.3, extension que nous laisserons ici de côté.

II.7. **Cas d'un écran du genre temps.** —

Nous avons déjà discuté cet intéressant problème [3], [7], et nous le faisons de manière plus complète dans un article à paraître [9]. Cette *expérience de pensée* constitue un moyen très parlant d'introduire l'interprétation des énergies négatives de Feynman. De plus, sa discussion montre que l'intervention de l'une ou l'autre des deux statistiques quantiques est indispensable pour écarter le paradoxe d'une *causalité rétrograde*, qui apparaitraît sans celà; le paradoxe en question se trouve écarté par le trait, nouveau, des statistiques quantiques, qui est de faire intervenir symétriquement les nombres d'occupation de l'état initial et de l'état final. En résumé, l'on peut dire que l'usage des statistiques quantiques (ou, ce qui revient au même, de la *superquantification*) est un élément aussi nécessaire à la réconciliation de la Relativité et des Quanta que l'introduction du *spin*.

III. — Particule à spin liée.

III.1. Transformations de Fourier covariantes [8].

— Considérons d'abord le cas, pratiquement si important, de la particule plongée dans un champ donné, invariant par translation du genre temps. Prenant pour repère le système propre du champ, il est classique de développer la solution générale $\psi(x)$ sur le système des fonctions propres de l'énergie totale

$$W = \frac{h}{2\pi i c} k_4 \qquad \left(t = \frac{1}{ic} x_4\right) \tag{38}$$

sous la forme

$$\left.\begin{aligned} i\sqrt{2\pi}\,\psi(x) &= \int \mathrm{d}k_4\,\rho(k_4)\,\psi\left(\vec{x}, k_4\right) \mathrm{e}^{ik_4 x_4}, \\ \vec{x} &= x_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

où nous avons introduit le facteur $\sqrt{2\pi}$ en vue de la suite.

Contrairement à sa première apparence, cette formule est covariante relativiste. — Introduisant, en effet, la transformation de Fourier

$$\left.\begin{aligned} (2\pi)^{\frac{3}{2}}\psi\left(\vec{x}, k_4\right) &= \iiint_{k_4 = k_4^0} \mathrm{d}^3\vec{k}\,\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{x}}\,\eta\left(\vec{k}, k_4\right), \\ \iiint \mathrm{d}^3\vec{x}\,\psi_p^+\psi_p &= \iiint \mathrm{d}^3\vec{k}\,\eta_p^+\eta_p. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

où p désigne l'indice de spin, *essentiellement non sommé quand il est répété*, et posant

$$\zeta(k) \equiv \rho(k_4)\,\eta\left(\vec{k}, k_4\right), \tag{41}$$

ainsi que

$$\left.\begin{aligned} i\delta\tau = \mathrm{d}^4 k, \qquad i\delta\omega = \mathrm{d}^4 x, \qquad k = k_\lambda \\ (\lambda = 1, 2, 3, 4), \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

(39) devient ([5])

$$4\pi^2\psi(x) = \iiiint \mathrm{e}^{ik^\lambda x_\lambda}\zeta(k)\,\delta\tau. \tag{43}$$

L'intégrale de Fourier covariante (43) n'a de sens que si l'on définit sa norme, ce qui, en Mécanique ondulatoire, doit être fait dans l'espace abstrait des fonctions de carré sommable. Postulons donc, toujours *sans sommation sur p*, une valeur finie (non invariante relativiste) pour chaque intégrale

$$I_p \equiv \iiiint \zeta_p^+\zeta_p\,\delta\tau = \iiiint \psi_p^+\psi_p\,\delta\omega; \tag{44}$$

(43) s'inverse alors suivant

$$4\pi^2\zeta(k) = \iiiint \mathrm{e}^{-ik^\lambda x_\lambda}\psi(x)\,\delta\omega. \tag{45}$$

Ici, et dans ce qui suit, *nous devrons supposer essentiellement diagonale (et hermitienne) la matrice* β *telle que*

$$\bar{\psi} = \psi^+\beta, \qquad \bar{\zeta} = \zeta^+\beta$$

(elle l'est en fait dans tous les cas usuels); alors, des valeurs finies pour les (44) entraînent une valeur finie pour la norme invariante relativiste

$$\iiiint \bar{\psi}\psi\,\delta\omega = \iiiint \bar{\zeta}\zeta\,\delta\tau. \tag{46}$$

Remarquons en passant que les seconds membres de (43) et (46) ont précisément la forme qui, dans le cas limite où le champ imposé s'évanouit, vient en coïncidence avec ceux des (7_2) et (24_2), précédemment données pour la particule libre.

Maintenant se présente une difficulté heureusement aisée à surmonter. *Physiquement*, la norme n'est pas l'intégrale quadruple (46), mais (normalisation en nombre de particules) l'intégrale triple conservative, prise sur une $\mathcal{E}$ quelconque du genre espace

$$i\iiint_{\mathcal{E}} \bar{\psi}\,a^\lambda\psi\,\delta u_\lambda = n, \tag{47}$$

formule qui, en général, n'admet pas de transformée de Fourier covariante. Or, il est aisé de voir qu'une valeur finie de la norme physique (47) entraîne une valeur infinie de la norme mathématique (46), ce qui semble renverser toute notre argumentation.

Mais introduisons arbitrairement quatre $\mathcal{E}$ ordonnées dans le temps, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ arbitrairement loin dans le passé, $\mathcal{E}_3$ et $\mathcal{E}_4$ arbitrairement loin dans le futur, et supposons qu'entre $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ d'une part, $\mathcal{E}_3$ et $\mathcal{E}_4$ de l'autre, le champ imposé admette un terme additif imaginaire pur, non astreint à vérifier les équations différentielles du champ; par exemple, dans le cas d'un 4-potentiel électromagnétique, les A'_α seront imaginaires et A'_4 réelle, et le 4-vecteur iA'_α n'aura pas à vérifier les équations de

([5]) Comparer avec Maurice Lévy [**14**, p. 149] qui, partant de (43), se ramène à une forme équivalente à (39).

Maxwell-Lorentz. De ce fait, le 4-courant $\psi a^\lambda \psi$ ne sera plus conservatif entre $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ ni entre $\mathcal{E}_3$ et $\mathcal{E}_4$, et nous supposerons que le champ imaginaire est précisément tel que l'intégrale (47) tombe à *zéro* avant $\mathcal{E}_1$ et après $\mathcal{E}_4$. De la sorte, une valeur finie, entre $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$, de la norme physique (47) est compatible avec une valeur finie de la norme mathématique (46).

III.2. **Définition covariante de l'orthogonalité.** — Deux fonctions ψ ou ζ seront dites orthogonales au nouveau sens covariant si

$$\iiiint \bar{\psi}_1 \psi_2 \delta\omega = \iiiint \bar{\zeta}_1 \zeta_2 \delta\tau = 0. \qquad (48)$$

Je dis que le système des fonctions propres de l'énergie totale, qui est orthogonal et complet au sens classique, est aussi orthogonal et complet au nouveau sens covariant (48).

Remarquons d'abord que, dans le 4-espace k, chaque fonction propre de l'énergie $\zeta(k)$ n'est non nulle que dans une bande d'énergie k_4, $k_4 + \Delta k_4$ (cas du spectre continu) ou que sur une lame infiniment mince d'énergie k_4 (cas du spectre ponctuel). Soit dit en passant, ceci permet, *dans le cas présent*, d'inverser de manière covariante la formule conservative (47). Dans le 4-espace x, les transformées $\psi(x)$ de ces $\zeta(k)$ ont une intensité invariante par translation x_4; d'une manière imagée, l'on peut dire qu'elles ne sont non nulles que dans des tubes indéfinis du genre temps. Chacune des précédentes cellules d'extension en phase, formée d'une bande horizontale du 4-espace k et d'un tube vertical du 4-espace x, est occupé par n particules; mais, de même qu'au paragraphe II.6, il serait *tout à fait erroné* de dire qu'il y a *à l'instant t n* particules dans chaque cellule. Chaque particule franchit l'instant t du temps macroscopique *et c'est tout*, sans qu'on puisse aucunement lui attribuer, dans cet acte, l'instant t, qui est absolument inobservable (du fait que nous parlons des valeurs de l'énergie). Les quatre relations d'incertitude sont impliquées à la fois dans le formalisme des intégrales de Fourier (43), (45) et (46); la normalisation physique liée à la formule (47) ne signifie aucunement que les particules peuvent être saisies sur l'hypersurface $\mathcal{E}$, mais simplement qu'elles franchissent cette hypersurface du genre espace, quelle qu'elle soit.

Ceci étant, il est clair que deux fonctions propres de l'énergie liées à des valeurs différentes de W sont orthogonales au nouveau sens (48) (du fait du facteur exponentiel en $i\Delta w.t$). Soient donc deux ζ liés à une même valeur propre multiple W du spectre ponctuel. *Puisque* β *est supposée diagonale*, deux composantes différentes ζ_p et ζ_q d'un ζ quelconque sont orthogonales au nouveau sens covariant. Soient donc deux $\zeta(k)$ différents liés au même système de valeurs W et p : ils seront orthogonaux au nouveau sens suivant (49_1) qui, *puisque* β *est diagonale*, équivaut au sens traditionnel (49_2)

C. Q. F. D.

$$\iiiint_{k_4-\varepsilon}^{k_4+\varepsilon} \bar{\zeta}_1 \zeta_2 \delta\tau = 0, \qquad \iiint_{k_4=k_4^0} \bar{\zeta}^{+}_{1p} \zeta_{2p} = 0 \qquad (49)$$

(nous avons supposé que k_4 n'est pas un point d'accumulation du spectre ponctuel). Dans le cas particulier du champ de force central, les transformés $\psi(x)$ des précédents $\zeta(k)$ sont bien connus : ils sont des produits d'un même facteur radial $f(r)$ par différentes fonctions de Laplace $Y_m^l(\theta, \varphi)$, qui forment bien un système orthogonal complet.

Je dis maintenant que, dans le 4-espace k, les précédentes bandes et lames d'énergie sont symétriques par rapport à l'origine des k. En effet, l'électron lié, par exemple, est équivalent à un positon lié à énergie cinétique négative, donc à une particule à énergie totale négative. Ceci se voit aussi en se reportant à la formule du spectre de l'atome hydrogénoïde, qui comporte un radical; en considérant les deux signes du radical, on retombe sur ce qui vient d'être dit. Mais, naturellement, il serait tout à fait erroné d'imaginer des transitions entre niveaux d'énergie de signes contraires; deux niveaux symétriques sont deux représentations possibles d'un même état physique; dans la normalisation en nombre de particules, c'est seulement la somme des nombres d'occupation correspondants qui a un sens. Comme pour la particule libre, l'énergie négative est une fiction formelle suggérée par le formalisme quantique. Macroscopiquement parlant, il n'y a que des énergies positives.

III.3. **Passage à la superquantification. Représentation de Heisenberg et représentation d'interaction. Cas d'un champ imposé variable quelconque.** — Tout comme la formule (7) du paragraphe II, la formule (43) ci-dessus peut être portée directement dans le formalisme de Feynman [12]; on obtient ainsi la matrice de l'émission-absorption dipolaire, de l'effet photoélectrique direct ou inverse, etc. Ici, le champ d'interaction induisant des transitions entre états libres ou liés de l'électron, entre états libres du photon, est le champ d'interaction entre l'électron et le photon libre.

Schwinger [16], en théorie superquantifiée, a tiré au clair les rapports entre la représentation covariante de Heisenberg, et la nouvelle représentation covariante d'interaction. *La représentation de Heisenberg est une représentation sans évolution*, où la fonction de répartition est invariable, et où les équations d'onde des particules sont les équations avec champ imposé; ceci exige un formalisme d'intégrales quadruples, comme on l'a vu au paragraphe III.2 précédent, et, par voie de conséquence,

à nouveau l'exclusion de toute idée d'évolution [1]. Au contraire, *la représentation d'interaction est une représentation avec évolution*, où le champ ne figure plus dans les équations d'onde des particules, mais induit des transitions entre états séparés de ces particules qu'elle met en rapport.

Prenons un exemple. Soit un atome initialement et finalement libre, mais qui, entre temps, subit l'action d'un champ électromagnétique extérieur variable. Si l'on traite l'action de ce champ en représentation d'interaction, il y a, entre l'état initial et l'état final, variation des poids statistiques des diverses valeurs des nombres d'occupation des états stationnaires de l'atome. Ceci est une description avec évolution [1].

Si, au contraire, on introduit le champ extérieur variable, à côté du champ du noyau, dans l'équation d'onde de l'électron, ce qui (même si l'on n'introduit pas explicitement la fonction de répartition invariable) revient à se placer en représentation de Heisenberg, alors on aura affaire à une généralisation simultanée des effets Stark et Zeeman (par la présence simultanée des deux champs, électrique et magnétique, et par leur variation temporelle); en parlant ainsi, nous avons supposé que le champ externe reste assez petit pour pouvoir être considéré comme une perturbation du champ du noyau, faute de quoi l'on ne pourrait plus parler de niveaux d'énergie, et il s'agirait d'un tout autre problème, dont nous dirons un mot dans un instant. Ceci est une description spatialisée sans évolution, impliquant symétriquement les quatre relations d'incertitude par le jeu des formules du paragraphe III.1.

Maintenant, nous pouvons nous affranchir de la restriction adoptée au début du paragraphe III.1.

Appelons *état lié au sens large* toute solution de l'équation d'onde avec champ imposé quelconque (arbitrairement variable). Tout le formalisme d'intégrales covariantes quadruples du paragraphe III.1 s'applique à ce cas général, y compris notamment la définition (48) de l'orthogonalité. Remarquons que *l'opérateur d'ondes est self-adjoint au sens impliqué par ces définitions*, car on a, par exemple dans le cas avec 4-potentiel A^λ, et compte tenu du terme additif imaginaire que nous avons introduit au paragraphe III.1,

$$\left.\begin{aligned} \left\{ a_\lambda \left(\overrightarrow{\partial^\lambda} + A'^\lambda + i A^\lambda \right) + k_0 \right\} \psi &= 0, \\ \bar{\psi} \left\{ a_\lambda \left(\overleftarrow{\partial^\lambda} + A'^\lambda - i A^\lambda \right) - k_0 \right\} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

d'où, l'intégrale étant étendue à tout l'Univers,

$$\begin{aligned} &\iiiint \left(\overrightarrow{\partial^\lambda} + 2 A'^\lambda \right) \bar{\psi} a_\lambda \psi \delta\omega \\ &= \iiint_{\mathcal{S}_{+\infty}} \bar{\psi} a_\lambda \psi \delta u^\lambda - \iiint_{\mathcal{S}_{-\infty}} \bar{\psi} a_\lambda \psi \delta u^\lambda \\ &\qquad + 2 \iiiint A'^\lambda \bar{\psi} a_\lambda \psi \delta\omega; \end{aligned} \tag{51}$$

mais (*cf.* § III.1) les trois dernières intégrales sont simultanément nulles. Récrivant alors les (50) sous la forme

$$| D\psi \rangle = k_0 \psi, \qquad k_0 \bar{\psi} = \langle \psi D |, \tag{52}$$

il résulte de (51) que

$$\langle \psi | D\psi \rangle = \langle \psi D | \psi \rangle, \tag{53}$$

avec par définition

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \iiiint \bar{\psi}_1 \psi_2 \delta\omega. \tag{54}$$

C. Q. F. D.

Le terme réel de masse propre k_0 peut être considéré comme une valeur propre multiple de l'opérateur D, self-adjoint (au sens précédent), les solutions orthogonales (au nouveau sens) de l'équation d'onde étant les fonctions propres correspondantes.

Ceci conduit à la *description minkowskienne spatialisée* d'une particule soumise à toute l'évolution spatio-temporelle d'un champ donné. Si l'on veut revenir à une description avec évolution, il suffit de transformer tout ou partie du champ imposé en terme d'interaction, et de se ramener, avec Schwinger [16], totalement ou partiellement, en *représentation d'interaction*.

Manuscrit reçu le 19 mai 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] DE BROGLIE L. — L'électron magnétique, Paris, 1934, p. 301-307.
[2] COSTA DE BEAUREGARD O. — *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **225**, 626.
[3] COSTA DE BEAUREGARD O. — *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **225**, 724.
[4] COSTA DE BEAUREGARD O. — *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **232**, 804.
[5] COSTA DE BEAUREGARD O. — *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 182.
[6] COSTA DE BEAUREGARD O. — Particules fondamentales et noyaux. *Colloques internationaux du C.N.R.S.*, Paris, 1953, p. 207-216.
[7] COSTA DE BEAUREGARD O. — *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **237**, 1495.
[8] COSTA DE BEAUREGARD O. — *C. R. Acad. Sc.*, 1954, **238**, 50 et 1196.
[9] COSTA DE BEAUREGARD O. — *Revista Mexicana de Fisica* (sous presse).
[10] COSTA DE BEAUREGARD O. — *Revue Philosophique* (sous presse).
[11] DYSON F. J. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 486-502.
[12] FEYNMAN R. P. — *Phys. Rev.*, 1949, **76**, 749-759 et 769-789.
[13] KEMMER N. — *Proc. Roy. Soc.*, 1939, A **173**, 91-116.
[14] LÉVY M. — *Proc. Roy. Soc.*, 1950, A **204**, 149.
[15] RIESZ M. — Actes du 10e Congrès des mathématiciens scandinaves, Copenhague, 1946, p. 123-131.
[16] SCHWINGER J. — *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 1439-1461.
[17] SCHWINGER J. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 651-679.
[18] TOMONAGA S. I. — *Prog. Theor. Phys.*, 1946, **1**, 27.

CALCUL DE LA RÉPARTITION DE L'ÉNERGIE SOLAIRE RÉFLÉCHIE PAR UN MIROIR PARABOLIQUE

Par François CABANNES et Albert LE PHAT VINH.

Sommaire. — L'objet de ce travail est le calcul de la répartition de l'énergie réfléchie par un miroir parabolique avec une source circulaire placée à l'infini (le Soleil), dont le centre est sur l'axe du miroir; le diamètre angulaire est de 32′ et la brillance est supposée uniforme. On détermine l'éclairement en chaque point d'un plan perpendiculaire à l'axe du miroir en supposant que la tache lumineuse produite par un point du miroir est une ellipse d'éclairement uniforme, et en intégrant les éclairements de ces ellipses élémentaires pour tous les points du miroir.

Au laboratoire de Mont-Louis, l'énergie solaire est reçue sur un miroir concave de très grandes dimensions qui est composé de nombreuses facettes dont la courbure et l'orientation ont été réglées de façon à concentrer au mieux l'énergie. La bonne réalisation d'un tel miroir ne peut être contrôlée et évaluée que par rapport au miroir parabolique de même distance focale et de même ouverture. Nous calculerons donc la répartition de l'énergie solaire réfléchie par un miroir parabolique au voisinage de son foyer.

Calcul de l'éclairement en chaque point du plan focal. — Nous supposons que la brillance du Soleil est uniforme, et que son centre se trouve sur l'axe du miroir (ce qui est réalisé lorsque le miroir est en service).

L'ouverture des miroirs utilisés est supérieure au double $2f$ de la distance focale : dans ce cas les aberrations d'un objet ponctuel même voisin de l'axe ne sont pas calculables facilement, nous allons donc considérer le disque solaire dans son ensemble.

L'énergie réfléchie par un élément de surface dS du miroir est

$$\mathrm{d}W = k\,\mathrm{d}S\cos i,$$

k étant la constante solaire exprimée en watts par centimètre carré (compte tenu de l'absorption atmosphérique et du facteur de réflexion du miroir), et i l'angle d'incidence du rayon moyen.

Sur le plan focal (P_0) nous avons comme image élémentaire une ellipse (E) de centre C, dont les axes sont (*fig.* 1) :

$$a = \frac{1}{2}\,\overline{S\Sigma}\,[\mathrm{tg}(2i + 16') - \mathrm{tg}(2i - 16')],$$

$$b = \overline{SC}\,\mathrm{tg}\,16',$$

16′ étant le rayon angulaire du Soleil.

On peut supposer le centre C et le foyer F confondus, car pour un miroir ouvert à $2f$:

$$\overline{FC} = a\,\mathrm{tg}\,16'\,\frac{X}{f - Y} \leq a\,.\,10^{-2}$$

(X et Y désignant les coordonnées du point S).

Nous pouvons donc écrire :

$$a = \frac{(f - Y)(f + Y)^2}{(f - Y)^2 - 4fY\,\mathrm{tg}\,16'}\,\mathrm{tg}\,16',$$

$$b = (f + Y)\,\mathrm{tg}\,16'.$$

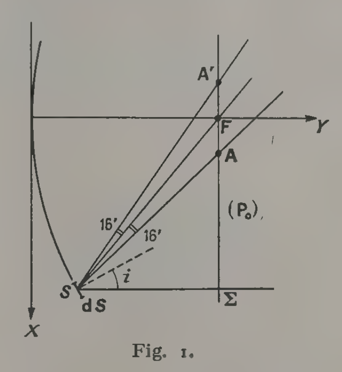


Fig. 1.

Déterminons l'éclairement $\mathcal{E}_Y(\rho, Y)$ fourni par une couronne (C_Y) de surface ΔS en un point M, du plan focal, situé à la distance ρ de l'axe du miroir. En désignant par ω l'angle solide correspondant au diamètre angulaire 32′ du Soleil, l'éclairement du point M fourni par l'élément de surface $\mathrm{d}S$ est (*fig.* 2)

$$\mathcal{E} = \frac{k\,\mathrm{d}S\cos i}{\omega}\,\frac{\cos v}{r^2} = \frac{k\,\mathrm{d}S\cos i}{\omega\,\overline{S\Sigma}^2}\cos^3 v.$$

Deux éléments $\mathrm{d}S_1$ et $\mathrm{d}S_2$ symétriques par rapport

à l'axe du miroir donnent au point M un éclairement $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ égal au double $2\mathcal{E}_0$ de l'éclairement du foyer, au terme en $(\Delta v)^2$ près (*fig.* 2). Pour le bord d'un miroir ouvert à $2f$, ce terme est égal à $10^{-4} \times 2\mathcal{E}_0$.

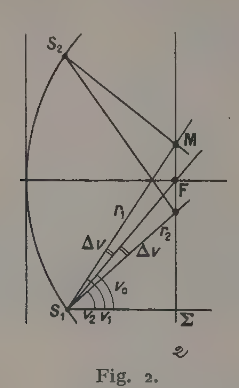


Fig. 2.

Si l'élément de surface dS de la couronne tourne autour de l'axe du miroir, l'image correspondante (E) tourne autour du foyer dans le plan focal et la surface de la couronne S_1S_2 qui éclaire le point M est

$$\delta S = \Delta S \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\pi},$$

$\theta_1 + \theta_2$ étant l'arc (du cercle de centre F et de rayon ρ) intérieur à l'ellipse (E) (*fig.* 3).

Comme le centre de (E) est confondu avec le foyer, les arcs θ_1 et θ_2 sont symétriques par rapport à l'axe du miroir, et il est légitime d'écrire que l'éclairement fourni au point M par la couronne (C_Y)

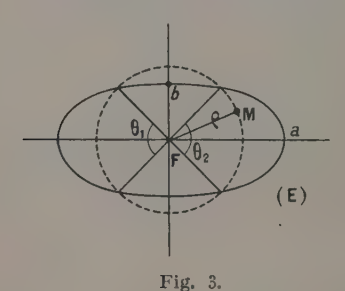


Fig. 3.

est égal au produit de la surface utile de la couronne

$$\delta S = \Delta S \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\pi}$$

par l'éclairement moyen

$$\mathcal{E}_m = \frac{k \cos i}{\pi ab}$$

d'une ellipse (E) correspondant à un élément de surface de la couronne $dS = 1$.

L'éclairement fourni par la couronne (C_Y) est donc

$$\mathcal{E}_Y = \frac{k\,\Delta S \cos i}{\pi ab} \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\pi};$$

$\frac{\Delta S \cos i}{ab}$ dépend de la couronne (C_Y) et $\theta_1 + \theta_2$ dépend de cette couronne et de la distance $FM = \rho$.

Naturellement

$$\theta_1 + \theta_2 = 2\theta_1 = 2\pi \quad \text{si } \rho \leq b,$$
$$\theta_1 + \theta_2 = 0 \quad \text{si } \rho \geq a.$$

En intégrant $\mathcal{E}_Y$ pour toutes les couronnes du miroir, nous obtiendrons l'éclairement

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_Y \varepsilon_Y$$

en chaque point du plan focal (P_0). Nous avons fait cette intégration en partageant le miroir en 30 couronnes. Pour chaque couronne, nous avons tracé l'ellipse (E), calculé $\frac{\Delta S \cos i}{ab}$ et déterminé graphiquement θ pour différentes valeurs de ρ.

Suivant le nombre de couronnes considéré, nous déterminons l'éclairement $\mathcal{E}(\rho)$ pour différentes valeurs de l'ouverture du miroir.

Calcul, en chaque point de l'axe du miroir, de l'éclairement d'une surface perpendiculaire à cet axe. — Les différents éléments de surface dS d'une même couronne donnent en un point M de l'axe du miroir un même éclairement, nous obtenons donc sans intégration l'éclairement fourni par la couronne (C_Y)

$$\mathcal{E}_Y = \frac{k\,\Delta S \cos i}{\omega} \frac{\cos v}{r^2}$$
$$= \frac{k}{\omega} 2\pi X\, dX \frac{m - Y}{[(m-Y)^2 + 4fY]^{\frac{3}{2}}}$$
$$= A \frac{m - Y}{[(m-Y)^2 + 4fY]^{\frac{3}{2}}} dY,$$

m étant la distance du point M au sommet du miroir et l'éclairement total au point M se réduit à une intégrale simple

$$\varepsilon = \frac{4\pi f k}{\omega} \int_0^{Y\max} \frac{m - Y}{[(m-Y)^2 + 4fY]^{\frac{3}{2}}} dY.$$

Nous avons calculé graphiquement cette intégrale et nous en donnons les résultats avec ceux du calcul général (*fig.* 6).

Calcul de l'éclairement en chaque point d'un plan parallèle au plan focal. — Considérons le plan (Py) d'ordonnées $f + y$. Pour une même couronne l'image élémentaire (E′) dans le plan (Py)

se déduit de l'image (E) par une homothétie de centre S et de rapport $\frac{f+y-Y}{f-Y}$ (*fig.* 4). Nous

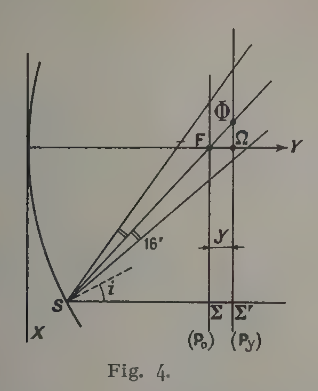


Fig. 4.

pouvons donc utiliser les mêmes ellipses en faisant un changement d'échelle.

D'autre part,

$$\Omega\Phi = \frac{X}{f-Y}y,$$

ce qui permet de tracer le point Ω. $\theta_1 + \theta_2$ est alors l'arc (du cercle de centre Ω et de rayon ρ) intérieur à (E'). Comme les arcs θ_1 et θ_2 ne sont plus égaux, nous devons supposer que l'éclairement de l'ellipse (E') est uniforme, c'est-à-dire que dans l'expression de l'éclairement

$$\mathcal{E}' = \frac{k\,\mathrm{d}S\cos i}{\omega\,\overline{S\Sigma'^2}}\cos^3 v,$$

nous négligeons les termes en (Δv).

Cette approximation est encore légitime, car pour le bord d'un miroir ouvert à 2 *f* ces termes sont

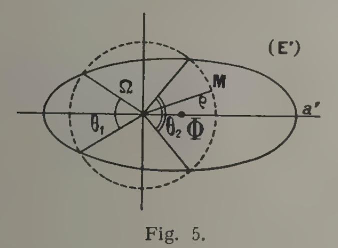


Fig. 5.

inférieurs à 2 pour 100 de l'éclairement moyen

$$\mathcal{E}'_m = \frac{k\,\mathrm{d}S\cos i}{\pi\,a'\,b'}.$$

L'ensemble des résultats est donné par la figure 6, qui représente en chaque point d'un plan méridien, l'éclairement d'une surface plane perpendiculaire à l'axe du miroir, c'est-à-dire le flux de l'énergie solaire réfléchie qui traverse l'unité de surface d'un plan parallèle au plan focal.

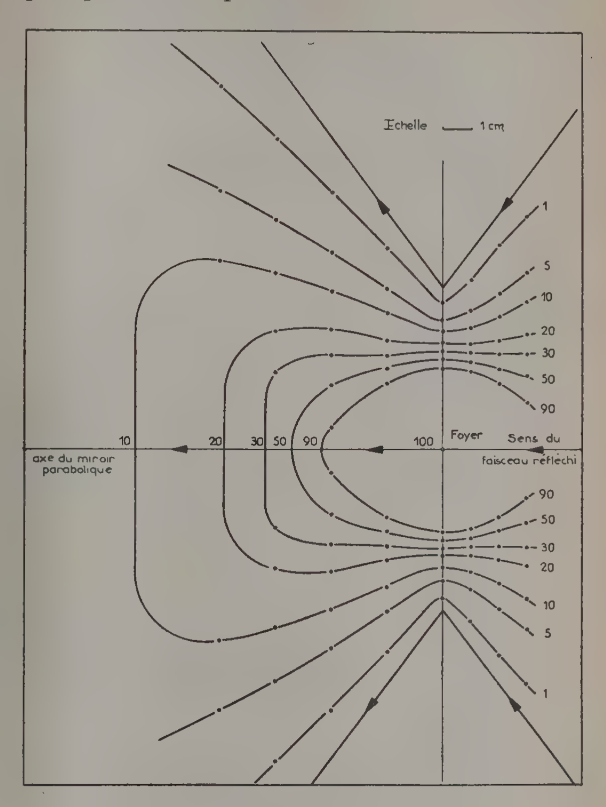


Fig. 6.

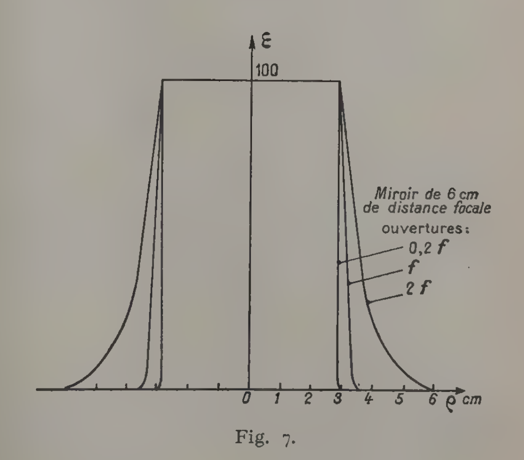


Fig. 7.

La figure 7 représente pour différentes ouvertures du miroir la répartition de l'éclairement du plan focal en fonction de la distance au foyer.

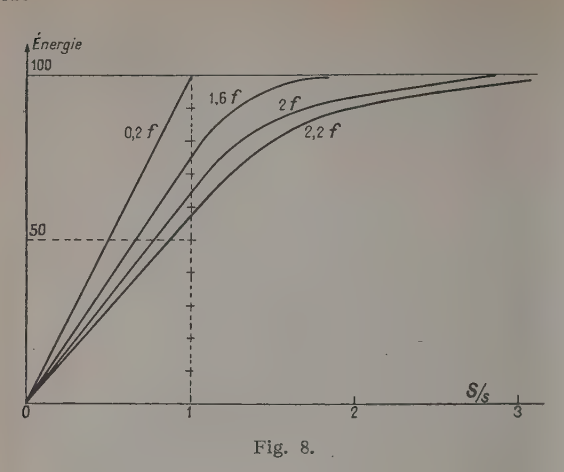


Fig. 8.

La figure 8 représente l'énergie solaire réfléchie à l'intérieur d'un cercle de surface S, centré sur le foyer, s étant la surface de l'image de Gauss, c'est-à-dire

$$s = \pi (f \operatorname{tg} 16')^2.$$

Remarquons, par exemple, que si pour une ouverture du miroir égale à 0,2 f l'énergie totale est réfléchie à l'intérieur de l'image de Gauss, lorsque l'ouverture est 2 f, ce n'est plus que 60 pour 100 de l'énergie totale qui est réfléchie sur la même surface.

Ces calculs ont été faits au Laboratoire de l'Énergie solaire, à Mont-Louis, sous la direction de MM. Félix Trombe et Marc Foëx.

Manuscrit reçu le 29 mars 1954.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 15, DÉCEMBRE 1954, PAGE 820.

REMARQUE SUR LA STABILISATION DE LA RÉPONSE D'UN MICROPHONE CONDENSATEUR

Par C. COLIN,

Laboratoire de Physique-Enseignement, Sorbonne.

Sommaire. — Il est possible d'améliorer la réponse d'un microphone condensateur par contre-réaction si :

a. on adjoint une deuxième électrode;
b. la tension recueillie est en phase avec le déplacement de la membrane.

Nous examinerons successivement le mode de couplage utilisé et l'application qui en résulte.

1. Notations. — a, rayon de la membrane; ρ, masse spécifique superficielle de la membrane; T, tension par unité de longueur; $\xi(r, \theta)$, amplitude d'un point (r, θ) de la membrane; d, distance de la membrane au repos à chacune des électrodes (1) et (2) symétriques par rapport au plan de la membrane;

$$x(r, \theta, t) = \frac{\xi(r, \theta, t)}{d};$$

E_0, potentiel continu de la membrane; $E(t)$ potentiel de l'électrode (1); $\alpha(t)$ potentiel de l'électrode (2), dû à l'insertion d'une impédance Z_2 entre (2) et le potentiel de référence; Q_0, charge de l'une quelconque des faces de la membrane lorsque les électrodes (1) et (2) sont au potentiel de référence; C_0 la capacité correspondante; Q_1, C_1, Q_2, C_2,

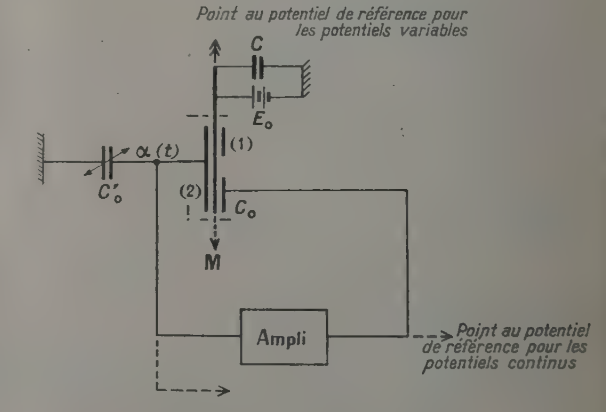


Fig. 1. — Schéma de principe.

les charges et les capacités respectives des faces de la membrane en regard des électrodes (1) et (2); nous poserons

$$Q_1 = Q_0 + q_1, \quad Q_2 = Q_0 + q_2$$

et pour une couronne de surface $2\pi r\,dr$

$$\Delta Q_1 = 2\pi r\,dr(\sigma_0 + \sigma_1), \quad \Delta Q_2 = 2\pi r\,dr(\sigma_0 + \sigma_2);$$

$$\Delta C_1 = \frac{C_0}{\pi a^2}\frac{2\pi r\,dr}{1-x}, \quad \Delta C_2 - \frac{C_0}{\Delta a^2}\frac{2\pi r\,dr}{1+x};$$

nous considérerons x, $\frac{E}{E_0}$; $\frac{\alpha}{E_0}$; $\frac{\sigma_1}{\tau_0}$; $\frac{\sigma_2}{\tau_0}$ comme des infiniment petits du premier ordre. Nous négligerons les infiniment petits du deuxième ordre.

2. **Équations de couplage.** — A. Équation traduisant l'équilibre mécanique du système. — Le déplacement $\xi(r, \theta, t)$ d'un point (r, θ) de la membrane tendue et maintenue fixe le long d'une circonférence de rayon a peut s'exprimer par une série double uniformément convergente. Soit :

$$\xi(r, \theta, t) = \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} [\xi_{mn}^{(1)}(t)\cos(n\theta) + \xi_{mn}^{(2)}(t)\sin(n\theta)]\mathcal{J}_n(k_{mn} r)$$

avec

$$\mathcal{J}_n(k_{mn} a) = 0.$$

$\mathcal{J}_n(x)$ désigne la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre n; $k_{mn}\,a = \xi_{mn}$ son $m^{\text{ième}}$ zéro. Dans le cas où l'on a uniformément

$$\frac{\partial \xi(r, \theta, t)}{\partial \theta} = 0,$$

une simplification évidente se présente et

$$\xi(r, t) = \sum_{m \geq 1} \mathcal{J}_{m_0}(t)\mathcal{J}_0(k_{m_0} r).$$

A partir de cette expression, nous pouvons calculer :

La force vive

$$T = \frac{1}{2}\rho\pi a^2 \sum_{m \geq 1} \dot{\xi}_{m_0}^2(t)\,\dot{\mathcal{J}}_0^2(\xi_{m_0});$$

L'énergie potentielle

$$W = \frac{1}{2} T\pi a^2 \sum_{m \geq 1} \xi_{m_0}^2 \dot{\mathcal{J}}_{m_0}^2(\xi_{m_0});$$

La fonction dissipation de Kelvin

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} k\rho\pi a^2 \sum_{m \geq 1} \xi_{m_0}(t)\,\mathcal{J}_0^2(\xi_{m_0}),$$

k étant un coefficient spécifique pouvant être complexe qu'il est possible d'étudier en soumettant la membrane à une impulsion.

La fonction des forces extérieures

$$U = 2\pi \sum_{m \geq 1} \xi_{m_0}(t) \int_0^a F(r)\,\mathcal{J}_0(k_{mn} r)\,r\,dr.$$

Dans le cas présent nous supposons la membrane portée à un potentiel continu E_0, l'électrode (1) à un potentiel $E(t)$, donc au deuxième ordre près :

$$F(r) = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2\pi\,d^2}\left[\frac{E-\alpha}{2E_0} + x\right].$$

Dès lors nous pouvons appliquer la méthode de Lagrange qui nous fournit la suite d'équations

$$\frac{d^2 x_{m_0}(t)}{dt^2} + k\frac{dx_{m_0}(t)}{dt}\,\omega_{m_0}^{\star 2} x_{m_0}(t) = \frac{E_0[E(t) - \alpha(t)]}{2\pi\rho\,d^3\,\xi_{m_0}\mathcal{J}_1(\zeta_{m_0})} \quad (1)$$

avec

$$\omega_{m_0}^{\star 2} = \omega_{m_0}^2 - \frac{E_0^2}{2\pi\rho\,d^3} \quad \text{quel que soit } m \geq 1,$$

$$\omega_{m_0}^2 = \frac{T}{\rho}\frac{\xi_{m_0}^2}{a^2};$$

la quantité $\frac{E_0^2}{2\pi\rho\,d^3}$ est homogène, au point de vue équations aux dimensions, à T^{-2}.

B. Équation traduisant l'équilibre électrique du système. — La chute de tension α se décompose en chutes de tension partielles correspondant aux partiels du mouvement de la membrane. Posons :

$$\alpha = \sum_{m \geq 1} \alpha_{m_0}, \quad \sigma_2 = \sum_{m \geq 1} \sigma_{m_0}^{(2)}, \quad \sigma_1 = \sum_{m \geq 1} \sigma_{m_0}^{(1)},$$

$$q_{(t)}^{(2)} = \sum_{m \geq 1} q_{m_0}^{(2)}(t).$$

La membrane étant découplée, nous aurons pour une couronne de surface $2\pi r\,dr$ le système d'équations :

$$E_0 = \frac{\Delta Q_2}{\Delta C_2} + Z_2\frac{dq_{(t)}^{(2)}}{dt}, \quad E_0 = \frac{\Delta Q_1}{\Delta C_1} + E,$$

$$\alpha = Z_2\frac{dq_{(t)}^{(2)}}{dt}.$$

Soit, en remarquant que

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta C_2} = E_0\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\sigma_0} + x\right);$$

$$q_{m_0}^{(2)} = 2\pi \int_0^a \sigma_{m_0}^{(2)}(r, t)\,r\,dr$$

un système équivalent :

$$\frac{E_0}{Q_0} q_{m_0}^{(2)}(t) + Z_2 \frac{\mathrm{d}q_{m_0}^{(2)}(t)}{\mathrm{d}t} - 2E_0 \frac{\mathcal{J}_1(\xi_{m_0})}{\xi_{m_0}} x_{m_0}(t), \quad (2)$$

$$\frac{E_0}{Q_0} q^{(1)}(t) + E + 2E_0 \sum_{m \geq 1} \left[\frac{\mathcal{J}_1(\xi_{m_0})}{\xi_{m_0}} x_{m_0}(t) \right], \quad (3)$$

$$\alpha_{m_0}^{(t)} = Z_2 \frac{\mathrm{d}q_{m_0}^{(2)}(t)}{\mathrm{d}t}. \quad (4)$$

Remarque. — $2 \sum_{m \geq 1} \left[\frac{\mathcal{J}_1(\xi^{m_0})}{\xi_{m_0}} x_{m_0}(t) \right]$ n'est autre que la valeur moyenne de $x(r, t)$ prise à l'instant t sur le domaine de rayon a.

3. **Recherche d'une solution permanente.** — Les équations (1), (2), (3), (4) ne sont pas indépendantes; il suffit de résoudre (1), (2), (4).

Posons

$$E(t) = \mathcal{E}\, \mathrm{e}^{j\omega t}, \quad x_{m_0}(t) = \chi_{m_0} \mathrm{e}^{j\omega t}, \quad q_{m_0}^{(2)}(t) = q_{m_0}^{*(2)} \mathrm{e}^{j\omega t},$$
$$q^{(2)}(t) = q^{*(2)} \mathrm{e}^{j\omega t}, \quad \alpha(t) = \alpha^* \mathrm{e}^{j\omega t}.$$

Par substitution, nous obtenons le système suivant :

$$q_{m_0}^{*(2)}[1 + jC_0 \omega Z_2] = 2Q_0 = \frac{\mathcal{J}_1(\xi_{m_0})}{\xi_{m_0}} \chi_{m_0}, \quad (5)$$

$$\chi_{m_0}[\omega_{m_0}^{*2} - \omega^2 + jk\omega] = \frac{E_0[\mathcal{E} - j\omega q^{*(2)}]}{2\pi\rho\, \mathrm{d}^3 \xi_{m_0} \mathcal{J}_1(\xi_{m_0})}; \quad (6)$$

$q^{*(2)}$, $\alpha_{m_0}^*$, χ_{m_0} seront dans un rapport réel si Z_2 correspond à une capacité C'_0. On déduit :

$$\chi_{m_0} = \frac{E_0(\mathcal{E} - \alpha^*)}{2\pi\rho d^3 \xi_{m_0} \mathcal{J}_1(\xi_{m_0})[\omega_{m_0}^{*2} - \omega^2 + jk\omega]},$$

$$\alpha^* = \frac{C_0}{C_0 + C'_0} E_0 \sum_{m \geq 1} \left[2 \frac{\mathcal{J}_1(\xi_{m_0})}{\xi_{m_0}} \chi_{m_0} \right].$$

Soit le résultat

$$\alpha^* = \frac{\lambda(\Sigma)}{1 + \lambda(\Sigma)}, \quad (7)$$

avec

$$\lambda = \frac{C_0}{C_0 + C'_0} \frac{E_0^2}{\pi\rho\, \mathrm{d}^3},$$

$$(\Sigma) = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{\xi_{m_0}^2 f_{m_0}(x)},$$

$$f_{m_0}(\omega) = \omega_{m_0}^{*2} - \omega^2 + jk\omega.$$

4. **Application au microphone condensateur.** — Nous supposons qu'une pression sonore s'exerce sur la membrane au travers de l'électrode (1). La force s' exerçant sur une couronne de surface $2\pi r dr$ devient

$$F(r) = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 r\, \mathrm{d}r}{d^2} \left[\frac{E - \alpha}{2E_0} + x \right] + 2\pi P r\, \mathrm{d}r,$$

l'équation (1) devient

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_{m_0}(t)}{\mathrm{d}t^2} + k \frac{\mathrm{d}x_{m_0}(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_{m_0}^{*2} x_{m_0}(t)$$
$$= \left\{ \frac{(E - \alpha)E_0}{2\pi\rho d^3} + \frac{2P}{\rho d} \right\} \frac{1}{\xi_{m_0} \mathcal{J}_1(\xi_{m_0})}. \quad (1\,bis)$$

Soit en régime permanent

$$\chi_{m_0} = \frac{1}{\xi_{m_0} \mathcal{J}_1(\xi_{m_0})} \frac{1}{\rho d} \left[\frac{(\mathcal{E} - \alpha^*)}{2\pi d^2} E_0 + 2P^* \right],$$

$$\alpha^* = \frac{2C_0}{C_0 + C'_0} E_0(\Sigma) \left[\frac{(\mathcal{E} - \alpha^*)E^0}{2\pi\rho d^3} + \frac{2P^*}{\rho d} \right].$$

Soit en supposant que $\mathcal{E} = -g\alpha^*$ $(g < 0)$

$$\alpha^* = \frac{\frac{2P^*}{\rho d} \frac{2C_0}{C_0 + C'_0} E_0(\Sigma)}{1 + \frac{C_0}{C_0 + C'_0} \frac{E_0^2}{\pi\rho d^3}(g - 1)(\Sigma)}. \quad (8)$$

Si

$$\frac{C_0}{C_0 + C'_0} \frac{E_0^2}{\rho\pi d^3}(g - 1)(\Sigma) \gg 1,$$

$$\mathcal{E} \simeq E_0 \frac{P}{\frac{E_0^2}{4\pi d^2}} = E_0 \frac{P}{P_E},$$

où $P_E = \frac{E_0}{d} \sigma_0$ (pression électrostatique).

Manuscrit reçu le 11 mars 1954.

BIBLIOGRAPHIE.

Lord Rayleigh. — Theorie of Sound, chap. IX, 193 et suiv.

Rc. Colwell, Friend et Stewart. I. K. — Vibrations of Symmetrical Plates and Membranes. *J. Amer. Soc. Acoust.*, **10**, 58.

INTERPRÉTATION ÉLECTRONIQUE DES PHÉNOMÈNES D'INERTIE DANS LES PHOTOPILES (EN PARTICULIER CAPACITÉ INTERNE)

Par G. BLET,

Docteur ès Sciences;
Chef du laboratoire de photométrie du C.R.S.I.M. (Marseille).

Sommaire. — Le calcul des durées de transit des photoélectrons à travers la couche d'arrêt permet d'expliquer qualitativement les phénomènes d'inertie des photopiles interprétés jusqu'à présent comme dus à une capacité interne variable.

L'hypothèse d'une conductivité de la couche d'arrêt variable avec le nombre d'électrons libres donne ensuite une explication satisfaisante de la résistance interne de la photopile et de ses variations sous certaines influences.

A partir de cet ensemble, il est possible de déterminer une constante de temps équivalente pour la photopile et d'en prévoir les variations en fonction des divers paramètres d'utilisation.

1. Distribution de vitesse des photoélectrons. — Dans toutes les hypothèses que nous avions formulées jusqu'à présent sur le mécanisme interne des photopiles, nous n'avions envisagé que le côté statique du problème, c'est-à-dire l'état d'équilibre. Nous n'avions de ce fait pas fait intervenir le temps mis par les photoélectrons pour traverser la couche d'arrêt.

Dans l'hypothèse d'Einstein, il existe un seuil photoélectrique correspondant à l'énergie d'extraction de l'électron :

$$h\nu = h\nu_0 + E.$$

Cette équation montre qu'il n'y a possibilité d'extraction d'un photoélectron que pour $\nu > \nu_0$. La courbe représentative $E = f(\nu)$, où E représente l'énergie du photoélectron, est la droite de la figure 1.

Mais si nous nous plaçons à l'échelle atomique, ce qui revient à regarder la courbe précédente à la loupe, nous constatons l'absence de seuil ponctuel.

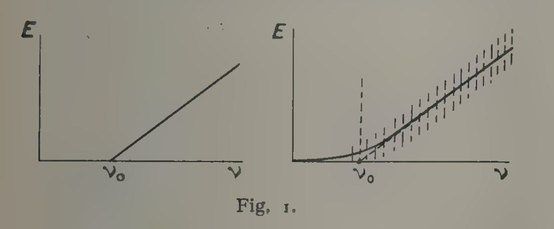


Fig. 1.

Il y a raccordement, dû à la répartition statistique des niveaux de l'électron photoélectrique.

Cette répartition entraîne également l'existence d'une bande d'énergie autour de la courbe précédente, la loi d'Einstein étant une loi de probabilité.

En fait, l'expérience montre que pour un faisceau incident de fréquence ν déterminée, il existe des photoélectrons de vitesses très variables.

La courbe de répartition de ces vitesses constitue la loi de distribution des vitesses scalaires. La loi de distribution spatiale est la loi de Lambert et la résultante des deux constitue la loi de distribution vectorielle.

La loi scalaire que nous avons adoptée jusqu'à présent est une loi expérimentale conforme à la figure 2.

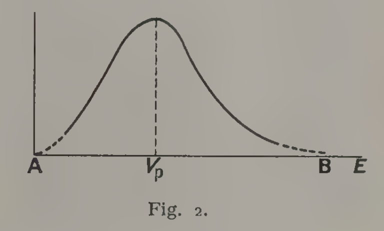


Fig. 2.

Le maximum de cette courbe correspond à l'énergie la plus probable. La forme de la courbe aux points A et B est très mal définie. En effet, il est très difficile, expérimentalement, de déterminer les distributions d'énergie lorsque celle-ci tend vers zéro ou augmente indéfiniment. En particulier, on ne peut expérimentalement déterminer la tangente en A ou en B, ni même savoir si le point B existe, c'est-à-dire si la courbe a un point d'arrêt ou est asymptotique à l'axe des V. La différence est d'ailleurs purement formelle et ne joue que sur le choix de l'équation à utiliser.

Nous avons étudié dans un travail à part [1] les répercussions possibles du choix d'une formule convenable pour cette loi de distribution.

Du point de vue qualitatif, seule nous intéressera ici l'existence de cette courbe de distribution d'énergie et son allure générale.

[1] *Voir* Note C.R.S.I.M., n° 359.

2. **Durée de transit des photoélectrons.** — Les divers photoélectrons émis avec des vitesses et des directions différentes ne mettront pas tous le même temps pour traverser la couche d'arrêt et parvenir à l'électrode transparente. Le seuil photoélectrique des photopiles au sélénium étant situé dans le proche infrarouge, les énergies des photoélectrons expulsés par de la lumière visible sont déjà considérables et correspondent à des vitesses

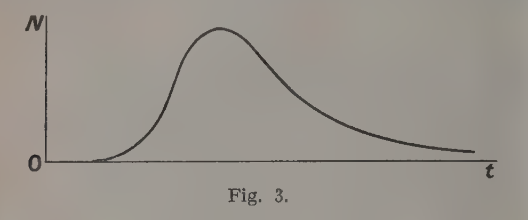


Fig. 3.

initiales de l'ordre de 1000 km/s environ. Mais à la traversée de la couche d'arrêt ces électrons vont perdre leur vitesse très rapidement par chocs sur les atomes et les ions qu'elle contient.

Un calcul très approximatif va nous montrer que, même avec cette vitesse initiale considérable, le photoélectron met un temps appréciable pour traverser une couche même très mince.

On admet en général que le libre parcours moyen est indépendant de la vitesse et son ordre de grandeur est 5.10^{-8} cm pour un semi-conducteur. Admettons que statistiquement l'électron perde la moitié de son énergie à chaque choc; sa vitesse est divisée par $\sqrt{2}$ et le temps mis par l'électron pour parcourir n parcours moyens vaut :

$$t = \frac{l}{v}\,\frac{K^{n+1}}{K-1},$$

avec :

l, libre parcours moyen $\sim 5.10^{-8}$ cm;
v, , vitesse initiale $\sim 10^{8}$ cm/s;
K, facteur d'affaiblissement de vitesse.

La durée de transit atteint 0,010 s (valeur correspondant aux constantes de temps des photopiles au sélénium) en donnant à n une valeur voisine de 85. Le chemin parcouru est donc de l'ordre de $5.10^{-8} \times 85$, soit 425 Å. Cette valeur donne une limite très supérieure de l'épaisseur de la couche d'arrêt. En effet, les électrons n'ont pas tous des vitesses normales et, de plus, les libres parcours moyens successifs doivent s'ajouter vectoriellement et non pas scalairement. Etant donné les imprécisions sur la valeur de ce libre parcours moyen et sur le facteur d'affaiblissement de vitesse à chaque choc, nous pensons que la zone de contact sélénium-métal, appelée couche d'arrêt, doit être contenue dans une épaisseur de l'ordre de 100 Å à un facteur près que nous estimons égal à 3.

En tout état de cause, nous admettrons donc que la durée de transit d'un électron à travers la couche d'arrêt est inversement proportionnelle à la composante normale de sa vitesse, sans plus.

En procédant par ordre, à partir de la loi de distribution des énergies et de la loi de Lambert, nous pourrons calculer la loi de distribution des composantes normales et, à partir de celle-ci, la loi de distribution des durées de transit. Celle-ci est représentée par une courbe du type de la figure 3.

Pour tous les calculs relatifs à ces diverses lois de distribution et à leurs équations, on voudra bien se reporter à la Note déjà citée (Note n° 359) où tous ces calculs sont détaillés.

3. **Établissement du courant photoélectrique.** — A l'instant $t = 0$, éclairons instantanément la cellule avec un éclairement E que nous laissons subsister. Pendant chaque durée élémentaire dt, la couche photoélectrique émet un nombre de photoélectrons $N\,dt$ proportionnel à l'éclairement.

A. Supposons qu'il n'y a pas accumulation d'électrons libres sur l'électrode collectrice, c'est-à-dire que les photoélectrons y arrivant trouvent un chemin parcouru quasi instantanément pour se recombiner avec les ions positifs libérés dans la couche photoémissive (court-circuit extérieur, par exemple).

Dans ce cas, à un instant t quelconque, le nombre total d'électrons arrivant pendant une durée dt est représenté par l'intégrale de la courbe des durées de transit prise entre zéro et t. Cette courbe a l'aspect de la figure 4.

L'allure pseudo-exponentielle de cette courbe

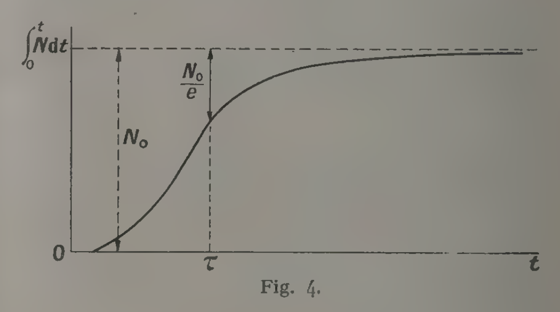


Fig. 4.

met bien en évidence l'accroissement progressif du courant photoélectrique qui tend vers une limite.

On peut définir par une courbe de ce type une pseudo-constante de temps comme étant le temps τ au bout duquel la courbe n'est séparée de son asymptote que par la fraction $\frac{1}{e}$ de la valeur limite. L'étude mathématique de ce problème indique la relation suivante :

$$\tau = \frac{K}{V_p},$$

τ étant cette pseudo-constante de temps;

V_p représentant la vitesse probable des photoélectrons;
K, un coefficient ne dépendant que de la forme de la loi de distribution des vitesses.

B. Supposons qu'il y ait accumulation partielle des électrons libres sur l'électrode collectrice. L'existence de charges libres crée un champ électrostatique à travers la couche d'arrêt. Ce champ est retardateur pour les photoélectrons; son influence est double :

1° Les photoélectrons seront tous ralentis;

2° Les photoélectrons trop lents n'atteindront pas la couche collectrice.

Cette seconde conséquence a déjà été étudiée à propos du potentiel retardateur (²). Nous avons vu du point de vue statique que le résultat est une diminution du courant photoélectrique par rapport à la valeur calculée sans tenir compte de ce phénomène.

Du point de vue dynamique, la première conséquence va apporter un élément nouveau : la vitesse probable V_p des électrons est diminuée. Si l'on admet, ce qui est approximativement correct, que la loi de distribution de vitesses n'est pas modifiée et que le coefficient K a conservé la même valeur, nous voyons que la constante de temps τ se trouve augmentée en raison inverse.

L'influence du champ électrostatique $\mathcal{E}$ limitée au premier ordre est de la forme suivante pour les durées de transit

$$t = t_0 + a\mathcal{E}t_0^2,$$

d'où

$$\tau = \tau_0 + a\mathcal{E}\tau_0^2.$$

Pour un même champ, la constante de temps est d'autant plus modifiée qu'elle est plus grande.

En résumé, l'existence d'un potentiel retardateur a pour double résultat de diminuer le courant photoélectrique (ou la tension de sortie) et d'augmenter la constante de temps, c'est-à-dire la durée d'établissement du courant.

En fait, nous verrons qu'un autre phénomène beaucoup plus important, dû à la variation de conductivité de la couche d'arrêt, masque la variation de constante de temps due au potentiel retardateur.

4. **Conductivité de la couche d'arrêt.** — Le nombre d'électrons libres contenus dans la couche d'arrêt est essentiellement variable. Nous supposons que dans l'obscurité, au repos, le nombre d'électrons libres par unité de volume est n_0. Lorsque la cellule est éclairée, les photoélectrons traversent la couche d'arrêt, mais nous supposons qu'ils n'interviennent pas dans la conductivité. Par contre, ceux qui ont atteint l'électrode collectrice, retraversent cette couche d'arrêt et participent à la conduction. Soit n le nombre par unité de volume de ces électrons libres; nous représenterons la conduction de la couche d'arrêt par la fonction :

$$\gamma = F(n_0 + n).$$

La seule hypothèse que nous faisons actuellement sur cette fonction est qu'elle est continue et croissante. La résistance de la couche d'arrêt est donc de la forme :

$$r = \frac{K}{\gamma} = \frac{K}{F(n_0 + n)}.$$

Reprenons l'hypothèse du potentiel retardateur, soit :

$$n = Ng(v),$$

relation qui donne le nombre de photoélectrons atteignant l'électrode collectrice en fonction du potentiel v, de cette électrode. Nous savons déjà que cette fonction $g(v)$ est égale à un pour $v = 0$ et tend vers zéro lorsque v tend vers le potentiel limite v_0.

D'autre part, la photopile étant en circuit ouvert, nous avons

$$v = Anr,$$

soit

$$v = \frac{KAn}{F(n_0 + n)} \quad \text{et} \quad n = Ng(v). \tag{1}$$

De ce groupe de relations nous allons pouvoir tirer quelques conclusions quant à la nature de la fonction F.

1° Si nous supposons $F = \text{const.}$, nous en déduisons que v et n sont proportionnels; comme v est limité, il s'ensuit que n l'est aussi, donc la fonction $g(v)$ doit tendre vers zéro lorsque l'éclairement, donc N, augmente indéfiniment. Donc $v \to v_0$.

Cette solution n'est donc pas impossible *a priori*, mais elle est contradictoire avec les variations de la résistance interne des photopiles avec l'éclairement. Nous l'éliminerons donc.

2° Supposons F variable avec n et, pour les valeurs très grandes de n, posons que F est d'ordre x : $F \sim n^x$.

a. Si $x < 1$, nous trouvons $v \to \infty$. Cette solution est à éliminer.

b. Si $x > 1$, nous trouvons $v \to 0$. Solution également à rejeter.

Il reste $x = 1$, ce qui donne

$$v \to v_1 = \text{const.}$$

Cette constante n'est pas forcément égale à v_0. En effet, la constante v_0 dépend de la fonction $g(v)$, c'est-à-dire de la loi de distribution des vitesses, et de celles-ci en valeur absolue.

Par contre, la constante v_1 à laquelle nous arrivons dépend de la fonction de conductivité F.

(²) Voir *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 241.

C'est évidemment la plus petite de ces deux limites qui sera atteinte.

Supposons $v_0 < v_1$. Dans ce cas, $g(v) \to 0$ et n tend vers une limite n' telle que

$$v_0 = \frac{KAn'}{F(n_0 + n')}.$$

Si, au contraire, $v_1 < v_0$: $g(v)$ est différent de zéro, n tend vers l'infini et v tend vers v_1.

Nous chercherons ultérieurement un moyen de différencier ces deux limites.

De toute manière, il semble que le type de fonction acceptable pour F soit une fonction d'ordre 1, la plus simple évidemment étant la loi de proportionnalité entre la conductivité et le nombre d'électrons libres.

Ceci nous amènerait finalement à écrire pour la résistance interne :

$$r = \frac{K}{n_0 + N g(v)},$$

où N est proportionnel à l'éclairement.

Ces conclusions n'impliquent pas forcément que les électrons libres excédentaires (n) participent à la conduction, mais leur présence, en modifiant la charge d'espace, peut agir sur la conduction due à d'autres électrons libres. Nous reviendrons ultérieurement sur ce point.

5. **Influence combinée de la durée de transit des photoélectrons et de la variation de conductivité de la couche d'arrêt.** — Nous avons admis pour la courbe d'arrivée des photoélectrons une courbe de forme exponentielle à constante de temps définie. Prenons cette constante de temps pour unité et écrivons :

$$n = N(1 - e^{-t}), \qquad \text{où} \quad N = KE,$$

le nombre de photoélectrons libérés étant proportionnel à l'éclairement.

D'autre part, nous avons admis pour la résistance interne une expression de la forme :

$$r = \frac{A}{n_0 + n}$$

en négligeant pour l'instant l'influence du potentiel retardateur.

En régime transitoire, à chaque instant, la tension aux bornes sera

$$v = Krn = KA\,\frac{N(1 - e^{-t})}{n_0 + N(1 - e^{-t})} \qquad (2)$$

[en tenant compte du potentiel retardateur, il faudrait remplacer N par $N\,g(v)$].

Cette expression (2) exprime la croissance de la tension aux bornes lorsqu'à l'instant $t = 0$ est appliqué instantanément un éclairement E. L'expression peut aussi se mettre sous la forme :

$$v = v_0\,\frac{f(t)}{\frac{n_0}{N} + f(t)},$$

où $f(t)$ est la fonction caractéristique d'arrivée des photoélectrons ($1 - e^{-t}$, par exemple) et $\frac{n_0}{N}$ le rapport du nombre d'électrons libres à l'obscurité au nombre d'électrons libres excédentaires par unité de temps, dus à l'éclairement E.

En régime permanent, $f(t)$ tend vers l'unité et

$$v \to v_0\,\frac{1}{\frac{n_0}{N} + 1}.$$

Donc pour les éclairements très faibles : $v \sim v_0 \frac{N}{n_0}$ est proportionnel à l'éclairement.

Au contraire, pour les éclairements très élevés,

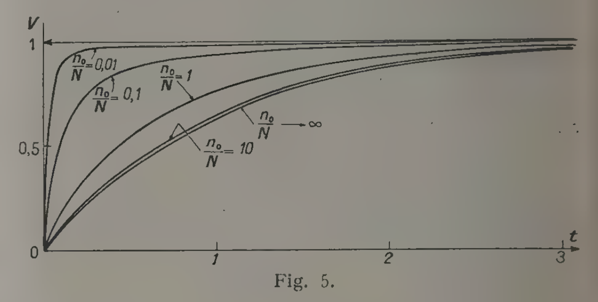


Fig. 5.

le potentiel croît lentement vers la valeur asymptotique v_0.

Pour l'instant, nous nous intéressons particulièrement au régime transitoire et il est aisé de voir que les diverses courbes de croissance de v sont différentes et d'autant plus rapides que l'éclairement est plus élevé.

Nous avons tracé sur le graphique de la figure 5 les courbes de croissance de la tension pour

$$\frac{n_0}{N} = 10 - 1 - 0{,}1 - 0{,}01,$$

en ramenant chaque fois la valeur asymptotique à la même ordonnée pour comparer plus aisément les formes de ces courbes.

Lorsque l'éclairement tend vers zéro, la forme de la courbe tend vers celle de $f(t)$.

Sur cette figure, pour simplifier les calculs, nous avons pris

$$f(t) = 1 - e^{-t},$$

ce qui donne par définition la valeur 1 pour la constante de temps aux éclairements très faibles.

En prenant la définition classique de la pseudo-

constante de temps, nous trouvons pour ces diverses courbes les constantes de temps suivantes :

$\frac{n_0}{N}$	∞	10	1	0,1	0,01
τ	1	0,94	0,618	0,145	0,017

Cette variation considérable visible sur le graphique est bien mise en évidence expérimentalement. Les photographies ci-jointes le prouvent qualitativement (nous poursuivons la mise au point d'un montage devant nous permettre des vérifications quantitatives).

D'autre part, on peut se rendre compte de la variation du niveau de la tension de sortie en fonction de l'éclairement. Cette variation telle qu'elle est déduite de l'équation établie ci-dessus peut se traduire par une expression de la forme :

$$\frac{a}{E} = \frac{b}{v} - c,$$

forme déjà rencontrée et ne représentant correctement les variations de potentiel que pour les éclairements faibles. En effet, nous avons négligé l'influence du potentiel retardateur qui devient plus importante aux éclairements élevés.

Dans ce cas la formule initiale devient :

$$v = v_0 \frac{f(t)}{\frac{n_0}{N g(v)} + f(t)}, \qquad (3)$$

d'où l'on tire une expression de la forme

$$E \doteq A \frac{v}{(v_0 - v)\, g(v)}.$$

Cette expression ressemble beaucoup à celle que nous avions admise jusqu'à présent en tenant compte seulement du potentiel retardateur :

$$E = A \frac{v}{g(v)}.$$

Le terme correctif $\frac{1}{v_0 - v}$, voisin de $\frac{1}{v_0}$ aux faibles éclairements, ne modifie donc pas cette région de la courbe. Pour les éclairements élevés, par contre, ce terme augmente la valeur de l'éclairement nécessaire pour avoir une tension donnée.

Dans le domaine des éclairements réalisables et mesurables au laboratoire, les deux courbes sont très voisines l'une de l'autre : en effet, la constante A ne peut se déterminer avec précision que pour les éclairements très faibles, et, dans ce cas, la tension de sortie devient elle-même trop faible pour être mesurée avec précision.

La formule (2) semble donc représenter correctement à la fois le phénomène transitoire et le phénomène permanent.

Voyons toutefois quelle est l'influence du facteur $g(v)$ sur le transitoire.

Le début de la courbe est très peu modifié puisque v est très petit, donc $g(v)$ très près de l'unité. Par contre, pour l'extrémité de la courbe, $g(v)$ diminue et tend vers une valeur $g(v_1)$ plus petite que l'unité,

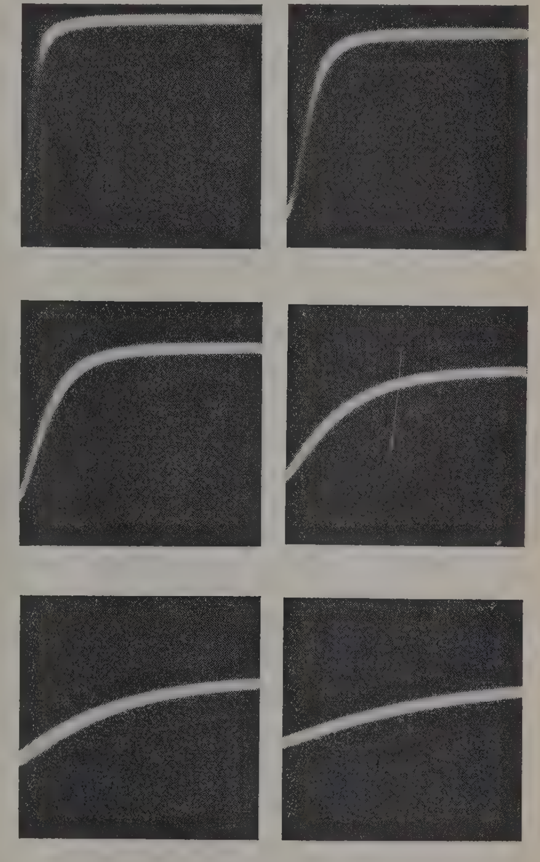


Fig. 6.

donc la limite atteinte v_1 est plus petite que celle qui serait atteinte sans introduire $g(v)$.

Le calcul de la nouvelle pseudo-constante de temps donne les résultats suivants :

$\frac{n_0}{N}$	∞	10	1	0,1	0,01
τ	1	0,80	0,445	0,175	0,054

d'où il résulte que l'effet du potentiel retardateur se traduit par une diminution de la constante de temps pour les faibles éclairements et une augmentation d'autant plus marquée que l'éclairement est plus intense, pour les forts éclairements. Le phénomène prépondérant reste toutefois la diminution de τ avec l'éclairement.

6. **Influence de la longueur d'onde.** — Nous avons vu précédemment que deux possibilités s'offraient à nous pour l'interprétation du potentiel limite. L'une des valeurs était conditionnée par la loi de distribution de vitesses des photoélectrons, l'autre par la loi de conductivité de la couche d'arrêt. La première de ces deux valeurs peut dépendre de λ alors que la seconde n'en dépend certainement pas.

Or, expérimentalement, il ne nous a pas été possible de mettre en évidence, aux erreurs d'expérience près, une influence quelconque de la longueur d'onde de la lumière excitatrice sur le potentiel limite. Il semble donc que ce soit la fonction de conductivité de la couche d'arrêt qui régisse « ce qui se passe » dans la photopile.

Une autre confirmation nous est apportée par le fait que la longueur d'onde est également sans influence sur la constante de temps à condition de choisir pour chaque λ un éclairement produisant le même courant de court-circuit. Les phénomènes sont donc conditionnés uniquement par le nombre d'électrons libérés, indépendamment de leur énergie initiale.

Conclusions. — En tenant compte d'une part de la loi de distribution de vitesse des photoélectrons d'autre part de la variation de conductivité de la couche d'arrêt en fonction du nombre d'électrons libres la parcourant, enfin, de l'effet du potentiel retardateur, il semble possible de représenter l'ensemble des phénomènes transitoires et permanents dans une photopile par une relation de la forme :

$$v = v_0 \frac{f(t)}{\frac{A}{E\,g(v)} + f(t)},$$

où :

A est une constante;

E est l'éclairement;

$g(v)$, la fonction du potentiel retardateur du type $\left(1 - \frac{v}{v_0}\right)^n$ ($n = 4$, en pratique);

$f(t)$, la fonction de croissance du courant d'électrons libres, peu différente en pratique de $1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$;

v_0, le potentiel limite caractéristique du type de couche d'arrêt utilisé.

Il semble confirmé que l'énergie initiale des photoélectrons n'intervient pas dans cette relation qui reste valable en lumière non monochromatique, à condition toutefois que la composition de la lumière ne se modifie pas lorsque son intensité varie.

L'expérience confirme ces résultats qualitativement. Pour une vérification quantitative, nous attendons la mise au point d'un montage délicat qui doit nous permettre un relevé très précis des transitoires et des mesures assez précises des pseudoconstantes de temps.

Manuscrit reçu le 8 mai 1954.

LETTRES A LA RÉDACTION

ÉTATS DE SURFACE ET CONDENSATION DE JETS MOLÉCULAIRES

Par P. Garin et P. Prugne.

Récemment, Devienne [1], [2] signalait l'importance de la nature du support récepteur sur la condensation des jets moléculaires à la température normale. Il semble indiquer que l'état de surface du support a moins d'influence que sa nature [1].

Notre expérience [3], [4], [5] nous incite à penser que l'état de surface (pureté, dégazage, etc.) est d'une importance majeure et que, s'il n'est pas rigoureusement défini, il masque complètement l'effet dû à la nature de la surface.

Nous avons étudié la condensation du zinc et du cadmium sur aluminium nu, sur aluminium recouvert de sa couche naturelle d'alumine, sur calcium, cuivre, argent, etc.

Méthode et dispositif expérimentaux utilisés. — Les feuilles *a*, *b*, *c* (*fig.*) sont en aluminium recouvert de son alumine, nettoyées classiquement par solvants (alcool pur) et pesées. Un écran *d* permet de masquer aux rayons moléculaires les feuilles *a* ou *c*. Le creuset évaporateur 1, l'écran *d* masquant *c*, permet d'obtenir sur *a* et *b* le support sur lequel on veut étudier la condensation de l'élément considéré. Les dépôts sur *a* et *b* sont identiques par raison de symétrie. L'écran vient alors masquer *a*. A la fin de l'expérience, la pesée de *a* donne la masse superficielle de ce premier dépôt.

Le creuset 2 permet l'obtention des jets moléculaires étudiés.

Des conditions géométriques [6], nous déduisons les masses totales M_b et M_c de l'élément qui viennent frapper les surfaces *b* et *c*. Par pesées, nous déterminons les masses effectivement condensées m_b, m_c. Ces mesures donnent les coefficients de condensation :

$K = \frac{m_b}{M_b}$ de l'élément considéré sur support pré-évaporé sous vide;

$k = \frac{m_c}{M_c}$ de l'élément considéré sur Al recouvert de sa couche d'alumine.

Nous trouvons :

Zn sur Al pré-évaporé $K = 0$ sur Al recouvert d'alumine $k = 1$;

Zn sur Ca pré-évaporé $K \simeq 1,6$ sur Al recouvert d'alumine $k \simeq 0,6$;

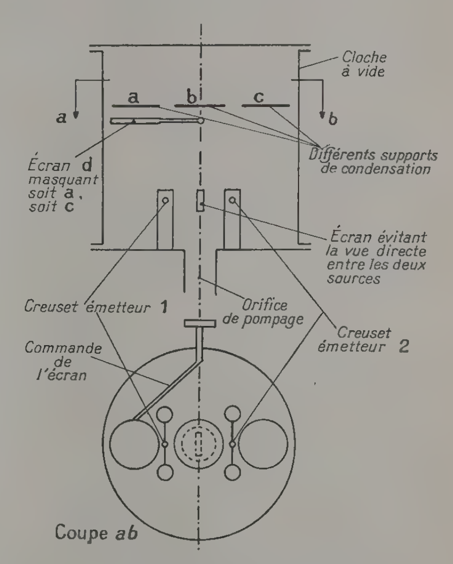
Zn sur Cu pré-évaporé $K \simeq 1,5$ sur Al recouvert d'alumine $k \simeq 0,5$;

Zn sur Ag pré-évaporé $K \simeq 0,9$ sur Al recouvert d'alumine $k \simeq 0,75$;

Cd sur Al pré-évaporé $K \simeq 1$ sur Al recouvert d'alumine $k = 0$.

Conclusions. — Les résultats trouvés n'indiquent que les valeurs relatives des coefficients de condensation. Néanmoins, on peut déjà en tirer les conclusions suivantes :

1° Les facteurs de condensation pour le zinc et le cadmium sont très caractéristiques de l'importance de l'état de surface. La valeur $K = 1$ pour le cadmium sur aluminium était en particulier passée



inaperçue [2], de même que l'espèce d'effet de répulsion de l'aluminium pur sur le zinc.

Il est admis de même que $K = 0$ pour le cadmium se condensant sur verre [2] à la température normale. Or Cd se condense avec $K \simeq 1$ sur du verre qui a été nettoyé par effluvage électrique dans l'air.

2° Les valeurs de K sur Cu et Ca sont paradoxalement supérieures à 1. Ceci peut s'expliquer par le fait que les molécules émises en dehors de l'angle solide déterminé par le support et le creuset, après plusieurs réflexions sur les parois de la cloche, sont venues se condenser sur ces supports de Cu et Ca. Ainsi, certains métaux pré-évaporés sous vide jouent un rôle de piège sur les faisceaux moléculaires par rapport à d'autres métaux. Ceci pourrait, semble-t-il, être utilisé pour la préparation de corps rares.

3° Enfin, tous les dépôts sur supports pré-évaporés

sous vide ont un aspect bien plus uniforme et homogène que ceux obtenus jusqu'à présent sur Al, Cu ou verre.

Ces travaux ont été exécutés sous la direction de M. Berthelot, chef du Service de Physique nucléaire.

Manuscrit reçu le 4 juillet 1954.

[1] Devienne M. — *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 53.
[2] Devienne M. — *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 257.
[3] Prugne P. et Léger P. — *J. Physique Rad.*, 1952, **13**, 129 A.
[4] Garin P., Léger P. et Prugne P. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 45 A.
[5] Barreau P., Léger P., Moreau J. et Prugne P. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 4 A.
[6] Holland L. et Steckelmacher W. — *Vacuum*, 1952, **11**, 346.

BANDES NOUVELLES DANS LE SPECTRE D'ÉMISSION DE L'ACÉTALDÉHYDE

Par Mme Régnier,
Chimie théorique, Faculté des Sciences, Nancy.

Nous avons obtenu un spectre très complexe par décharge haute fréquence sans électrodes dans un courant gazeux d'acétaldéhyde. Les conditions d'expériences et les premiers résultats ont fait l'objet de deux publications [1]. Ce spectre contient surtout les produits de décomposition de la molécule d'acétaldéhyde, mais aussi un certain nombre de bandes qui semblent n'avoir jamais été signalées. Ces bandes sont dégradées vers le rouge et s'étendent entre 3 750 et 5 000 Å. Les positions approximatives des principales têtes de bandes sont les suivantes : 4 728, 4 715, 4 699, 4 300 (?), 4 144, 3 789, 3 781, 3 767 et 3 758 Å.

L'extrême complexité du spectre n'autorisant pas des recherches plus précises, nous avons abandonné la décharge haute fréquence trop violente et donnant donc trop de produits de dissociation diatomiques, et nous avons employé une décharge dans une cathode creuse. Les électrodes sont inspirées d'un montage de Schüler [2]. Par ailleurs, les conditions d'expériences sont sensiblement les mêmes que dans le cas de la décharge haute fréquence, à l'exception de la pression, plus élevée que précédemment.

Des diverses observations ainsi faites, il ressort que :

1° Les bandes inconnues, assez intenses dans la décharge haute fréquence, n'apparaissent absolument pas dans la cathode creuse;

2° Le spectre de CO, très développé dans la décharge haute fréquence est peu intense dans la cathode creuse : seules apparaissent les bandes d'Angström. Les bandes de triplets ont disparu totalement;

3° Le spectre du carbone (bandes de Swan), absent dans la décharge sans électrodes, est intense dans le second cas;

4° Les bandes de CH sont très fortes dans la cathode creuse, alors qu'elles n'apparaissent — très faiblement — dans la décharge haute fréquence que lorsque la pression augmente un peu.

Ainsi les bandes inconnues sont apparues en même temps que les bandes de CO et en l'absence des bandes de C_2 et de CH. On est donc en présence de trois hypothèses possibles sur l'origine de ces bandes :

— Elles peuvent être un nouveau système de CO non encore signalé;

— Elles peuvent être dues à la molécule d'acétaldéhyde elle-même (cette hypothèse est sans doute la moins probable, bien que récemment un spectre d'émission de l'acétaldéhyde lui-même ait été signalé dans la région 3 500-4 200 Å [3];

— Elles peuvent avoir pour émetteur un groupement plus ou moins complexe formé à partir de carbone, hydrogène et oxygène.

C'est ce problème que nous nous efforçons de résoudre en étudiant maintenant la structure vibrationnelle et surtout la structure fine des bandes intéressantes.

Manuscrit reçu le 22 septembre 1954.

[1] Regnier S. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 930; 1953, **234**, 1152.
[2] Schüler et Gollnov. — *Z. Physik*, 1935, **93**, 611.
[3] Wilse Robinson G. — *J. Chem. Phys.*, 1954, **22**, 1147.

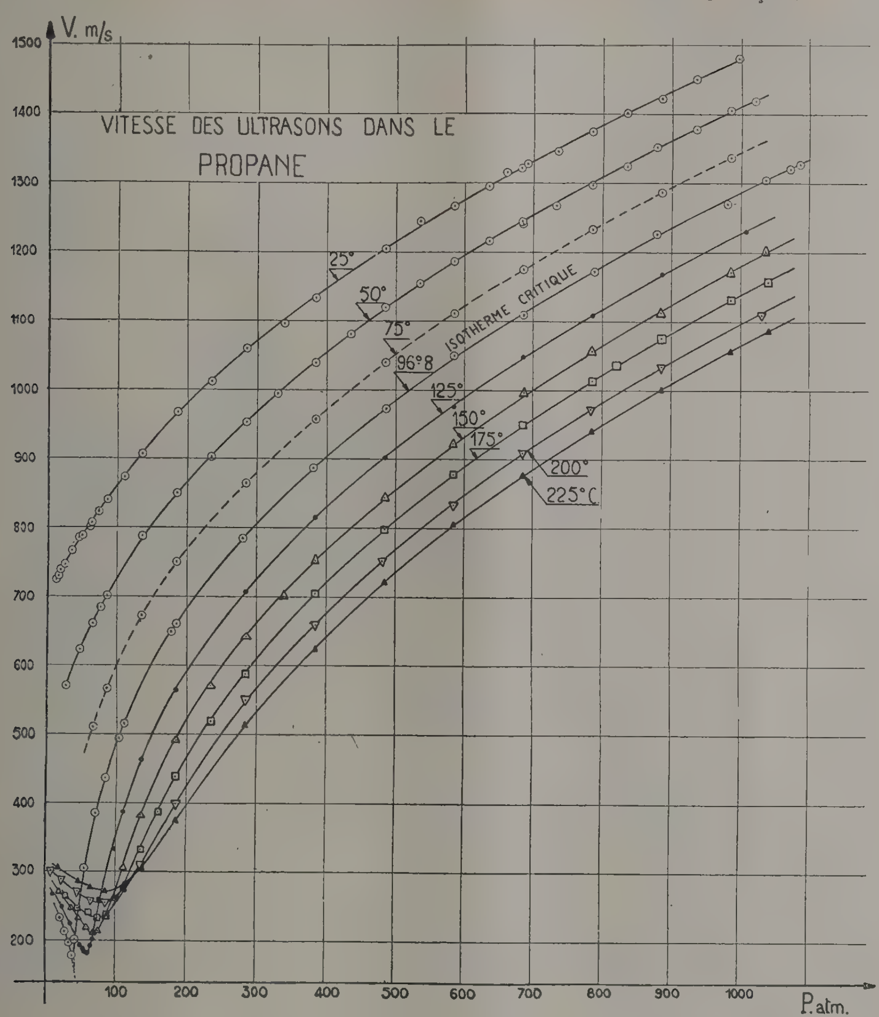
VARIATIONS DE LA VITESSE DES ULTRASONS DANS LE PROPANE EN FONCTION DE LA TEMPÉRATURE ET DE LA PRESSION

Par A. Lacam,
Laboratoire des Hautes Pressions, Bellevue.

Utilisant le même appareillage qui nous a permis de faire des mesures dans le méthane sous pression [1] jusqu'à 200° C, nous avons mesuré la vitesse de propagation des ultrasons dans le propane pour les températures de 25, 50, 96,8, 125, 150, 175, 200 et 225° C et des pressions allant jusqu'à environ 1100 atm. Le propane que nous avons utilisé nous a été fourni par la Phillips Petroleum (U. S. A.) qui le garantit spectroscopiquement pur dans l'infrarouge. Les températures expérimentales étaient maintenues constantes au 1/20e de degré. La température critique du gaz étant 96°,8, nous avons pu opérer dans la phase liquide (isothermes 25 et 50° C), région dans laquelle le fluide a un comportement normal : la vitesse décroît avec la température. La région des pressions peu élevées, en particulier celle du point critique a été explorée et représentée sur la figure pour donner une vue d'ensemble des phénomènes. Cette région a été étudiée d'une façon plus systématique par J. Noury [2]. On note un bon accord entre les deux séries de résultats. Dans la phase gazeuse nous observons que la vitesse croît avec la température pour les faibles pressions; quand la pression augmente il se produit une inversion de la position relative des isothermes. Ainsi pour des pressions supérieures à 120 atm, la vitesse décroît avec la température. Aux pressions élevées l'ensemble des isothermes compris entre 25 et 225° C présente l'allure d'un faisceau de paraboles sensiblement parallèle. Les courbes isobares $V = f(t^o)$ nous ont permis de déduire l'isotherme 75° C, qui est représentée en traits interrompus sur la figure. Nous n'avons décelé aucune dispersion dans le domaine de fréquences étudiées, qui s'étend entre 3 et 4 MHz.

Ce résultat est à rapprocher à celui de Lambert et Rowlinson [3] qui n'ont pas trouvé de dispersion aux faibles pressions pour des fréquences comprises entre 0,25 et 4 MHz. La précision sur les mesures de la vitesse est de l'ordre de 1 pour 100 (sauf dans la région critique et aux pressions inférieures à 80 atm).

Manuscrit reçu le 15 octobre 1954.



[1] Lacam A. — *J. Physique Rad.*, à l'impression.
[2] Noury J. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 831.
[3] Lambert J. D. et Rowlinson J. S. — *Proc. Roy. Soc.*, 1950, **204** A, 424-434.

VITESSE DES ULTRASONS DE 585 kHz DANS LE PROPANE AU VOISINAGE DE L'ÉTAT CRITIQUE

Par J. Noury,

Laboratoire des Hautes Pressions, Bellevue.

Poursuivant mes études concernant la détermination de la vitesse des ultrasons dans les fluides autour de la région critique par la méthode de la diffraction de la lumière, j'ai effectué des mesures dans C_3H_8.

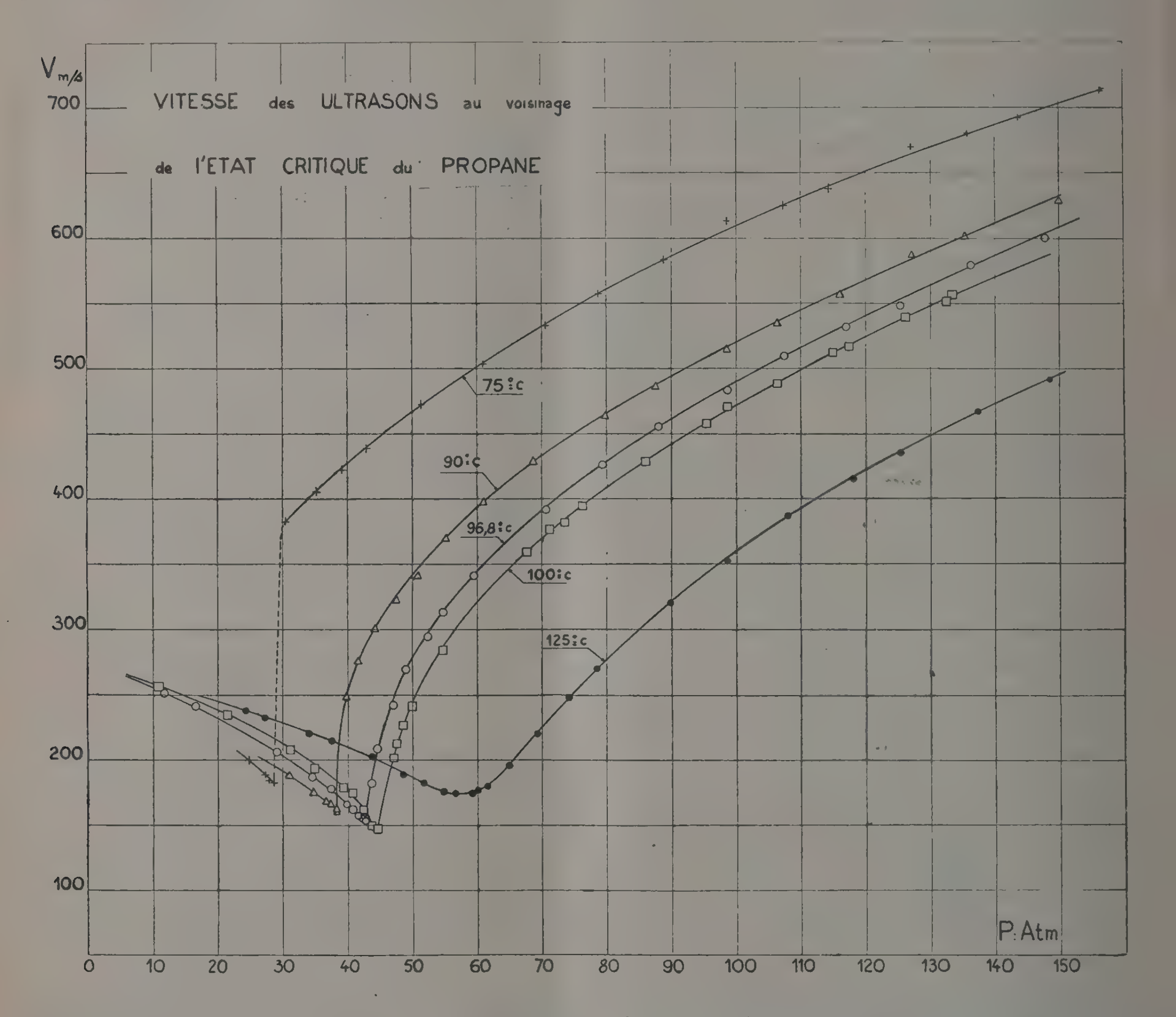
L'installation utilisée précédemment pour l'étude des régions critiques de CO_2, N_2O et C_2H_6 [1], [2] a été considérablement modifiée. La bombe expérimentale a été placée cette fois dans un double bain de polyéthylène-glycol de dimensions notables fortement brassé. Ceci a permis d'étendre le domaine des températures explorées.

La vitesse des ultrasons de fréquence 585 kHz a été mesurée le long des isothermes 75, 90, 96,8° C (isotherme critique); 100 et 125° C maintenues constantes au 1/100e de degré pour un domaine de pression allant de 10 à 150 atm. Le propane provenait de la Phillips Petroleum qui le garantit spectroscopiquement pur dans l'infrarouge.

La précision des mesures est 1,5 pour 100 dans la région critique. Les résultats obtenus pour les pressions plus élevées sont en bon accord avec ceux de A. Lacam [3].

Comme dans les études précédentes, on constate que lorsque la pression croît la vitesse décroît notablement, passe par un minimum au point critique puis croît à nouveau. La vitesse minimum enregistrée sur l'isotherme critique (96,8° C) est 152,5 m/s pour 42,6 atm; c'est la valeur la plus proche au point critique qui ait pu être mesurée.

La stabilité du propane soumis aux ondes ultra-



sonores a été telle que des spectres de diffraction relativement nets ont pu être observés dans la région critique et un grand nombre de points ont été relevés dans cette région à des intervalles très rapprochés.

En conséquence l'isotherme critique présente un caractère de continuité bien plus accusé que dans les études précédentes.

Sur l'isotherme 75° C on constate un accroissement très brusque de la vitesse autour de la pression 30 atm, ce qui correspond au passage de la phase vapeur à la phase liquide.

Manuscrit reçu le 15 octobre 1954.

[1] Noury J. — *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **233**, 516.
[2] Noury J. — *C. R. Acad. Sc.*, 1952, **234**, 303-305.
[3] Lacam A. — *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 830.

Le Gérant : Maurice Blondin. 146396 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1954.

SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHYSIQUE
Reconnue comme Établissement d'utilité publique
par décret du 15 janvier 1881

PROCÈS-VERBAUX

ET

RÉSUMÉS DES COMMUNICATIONS

FAITES PENDANT L'ANNÉE 1954

Siège social : 44, rue de Rennes, PARIS (VI[e])

PARIS
Société JOURNAL DE PHYSIQUE, Éditeur
12, Place Henri-Bergson
—
1954

TABLE DES MATIÈRES

SÉANCE DU 20 NOVEMBRE 1953.

SÉANCE DU 18 DÉCEMBRE 1953.

SÉANCE DU 15 JANVIER 1954.

SÉANCE DU 19 FÉVRIER 1954.

RÉUNION COMMUNE
AVEC LA SOCIÉTÉ DES RADIOÉLECTRICIENS.

SÉANCE DU 17 OCTOBRE 1953.

---

*

RÉUNIONS COMMUNES AVEC LA SOCIÉTÉ DES RADIOÉLECTRICIENS, LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DES INGÉNIEURS ET TECHNICIENS DU VIDE, ET LE COMMISSARIAT A L'ÉNERGIE ATOMIQUE.

SÉANCES DES 30 SEPTEMBRE, 1er ET 2 OCTOBRE 1953.

SECTION D'OPTIQUE.

SÉANCE DU 6 NOVEMBRE 1953.

SÉANCE DU 4 DÉCEMBRE 1953.

SÉANCE DU 8 JANVIER 1954.

SÉANCE DU 5 FÉVRIER 1954.

SÉANCE DU 12 MARS 1954.

SÉANCE DU 2 AVRIL 1954.

SECTION DE PHYSIQUE CORPUSCULAIRE.

SÉANCE DU 30 OCTOBRE 1953.

SÉANCE DU 22 JANVIER 1954.

SÉANCE DU 19 MARS 1954.

SÉANCE DU 14 MAI 1954.

SECTION SUD-OUEST.

(Bordeaux.)

SÉANCE DU 29 OCTOBRE 1953.

SÉANCE DU 19 NOVEMBRE 1953.

SÉANCE DU 17 DÉCEMBRE 1953.

SÉANCE DU 21 JANVIER 1954.

SÉANCE DU 25 FÉVRIER 1954.

SÉANCE DU 11 MARS 1954.

SÉANCE DU 29 AVRIL 1954.

SECTION MÉDITERRANÉE.

(Montpellier et Marseille.)

SÉANCE DU 11 FÉVRIER 1954.

SÉANCE DU 21 DÉCEMBRE 1953.

SÉANCE DU 29 JANVIER 1954.

SÉANCE DU 6 MAI 1954.

SÉANCE DU 14 MAI 1954.

SÉANCE DU 28 MAI 1954.

SECTION CENTRE-OUEST.

(Poitiers.)

SÉANCE DU 5 DÉCEMBRE 1953.

SECTION SUD-EST.

(Lyon.)

SÉANCE DU 15 JANVIER 1954.

SÉANCE DU 12 FÉVRIER 1954.

SÉANCE DU 12 MARS 1954.

SÉANCE DU 26 MARS 1954.

SÉANCE DU 14 MAI 1954.

SÉANCE DU 18 JUIN 1954.

SECTION SUD-EST.

(Lyon et Clermont-Ferrand.)

SÉANCE DU 28 MAI 1954.

SECTION DE STRASBOURG.

SÉANCE DU 11 DÉCEMBRE 1953.

SÉANCE DU 29 JANVIER 1954.

SÉANCE DU 12 MARS 1954.

SÉANCE DU 26 MARS 1954.

SÉANCE DU 7 MAI 1954.

SÉANCE DU 11 MAI 1954.

SÉANCE DU 15 OCTOBRE 1954.

(Organisée en commun par la Société française de physique, la Société Chimique de France, Sections de Strasbourg et la Société de Biologie de Strasbourg).

SECTION BOURGOGNE-FRANCHE-COMTÉ.

(Dijon.)

SÉANCE DU 14 NOVEMBRE 1953.

SECTION D'ALGER.

SÉANCE DU 27 AVRIL 1954.

